

PENENTUAN BILANGAN KROMATIK HARMONIK PADA GRAF HASIL KALI KARTESIAN ANTARA GRAF LINTASAN DENGAN TIGA TITIK DAN GRAF BINTANG DENGAN $(n+1)$ TITIK

Feren*

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Saib Suwilo

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Mardiningsih

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Maulida Yanti

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Abstrak. Penelitian ini membahas penentuan bilangan kromatik harmonik pada graf hasil kali Kartesian antara graf lintasan dengan tiga titik (P_3) dan graf bintang dengan n titik (S_n). Pewarnaan harmonik merupakan pewarnaan simpul graf sedemikian rupa sehingga setiap pasangan warna pada sisi graf muncul paling banyak satu kali. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan algoritma pewarnaan harmonik serta membuktikan rumus umum bilangan kromatik harmonik dari graf $P_3 \times S_n$. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan pendekatan matematis, dimulai dari pembentukan matriks adjacency termodifikasi hingga pengujian algoritma pewarnaan. Pembuktian dilakukan menggunakan pendekatan induksi dan analisis struktur graf. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan kromatik harmonik graf $P_3 \times S_n$ untuk $n = 1$ adalah 5, untuk $n = 2, 3$ adalah 7, untuk $n = 4$ adalah 8, dan untuk $n \geq 5$, bilangan kromatik harmoniknya adalah $n + 3$.

Kata Kunci: graf lintasan, graf bintang, graf hasil kali Kartesian, pewarnaan harmonik, bilangan kromatik harmonik.

Abstract. This research discusses the harmonious chromatic number on the Cartesian product of a path graph with three vertices (P_3) and a star graph with n vertices (S_n). Harmonious coloring is a vertex coloring of a graph such that each pair of colors appears on at most one edge. The objective of this research is to develop a harmonious coloring algorithm and also to determine and prove a general formula for the harmonious chromatic number of the graph $P_3 \times S_n$. The research method is literature-based with a mathematical approach, start from constructing modified adjacency matrices until testing the coloring algorithm. The proof is conducted through mathematical induction and structural graph analysis. The result shows that the harmonious chromatic number of $P_3 \times S_n$ for $n = 1$ is 5, for $n = 2, 3$ is 7, for $n = 4$ is 8, whereas for $n \geq 5$, it is $n + 3$.

Keywords: path graph, star graph, Cartesian product graph, harmonious coloring, harmonious chromatic number.

Sitasi: Feren., Suwilo, S., Mardiningsih, Yanti, M. 2025. Penentuan Bilangan Kromatik Harmonik pada Graf Hasil Kali Kartesian antara Graf Lintasan dengan Tiga Titik dan Graf Bintang dengan $(n+1)$ Titik. *MES (Journal of Mathematics Education and Science)*, 11(1): 1-8.

Submit: 10 April 2025	Revise: 25 Mei 2025	Accepted: 28 Mei 2025	Publish: 02 September 2025
---------------------------------	-------------------------------	---------------------------------	--------------------------------------

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736. Beliau berhasil menyelesaikan masalah jembatan Königsberg, dengan merepresentasikan masalah tersebut dalam konsep graf, yang terdiri dari titik-titik yang mewakili daratan dan pulau, serta sisi mewakili jembatan.

Sebuah graf terdiri dari suatu himpunan berhingga dan tak kosong V yang terdiri dari titik (*vertex*) dan himpunan sisi (*edge*) E yang merupakan himpunan bagian yang berisi dua elemen dari V (Chartrand dan Zhang, 2012). Dalam teori graf, terdapat berbagai konsep yang penting, salah satunya adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah pemetaan warna-warna pada titik, sisi, atau wilayah pada graf sedemikian sehingga setiap titik, sisi, atau wilayah yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda (Afriantini *et al.*, 2019). Terdapat beberapa jenis pewarnaan graf, antara lain pewarnaan *graceful*, pewarnaan lokasi, pewarnaan harmonik, dan sebagainya. Pewarnaan harmonik adalah pewarnaan yang menggunakan konsep pewarnaan titik dengan syarat setiap pasang warna paling banyak muncul satu kali. Bilangan kromatik harmonik adalah jumlah minimum warna yang dapat digunakan dalam pewarnaan harmonik graf (Edwards, 2013).

Dalam beberapa tahun terakhir, penelitian mengenai pewarnaan graf pada berbagai jenis graf mengalami perkembangan. Retnoningsih *et al.* (2022) melakukan penelitian mengenai pewarnaan titik pada beberapa jenis graf sentripetal, yaitu pada graf gurita, graf gunung api, graf sandat, graf bunga matahari, dan graf tunjung. Lestari *et al.* (2024) meneliti tentang bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf sentripetal yang meliputi graf gurita, graf sandat, graf kincir angin belanda, dan graf gunung api. Asyari *et al.* (2022) menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf bintang, graf diamond, graf buku, graf kipas angin, dan graf kincir angin belanda. Robiandi *et al.* (2021) meneliti tentang pewarnaan harmonik pada graf lili dan graf pertemanan. Fran *et al.* (2023) meneliti tentang bilangan kromatik harmonik graf payung, graf parasut, dan graf semi parasut.

Dari beberapa penelitian tersebut, graf yang menarik untuk dibahas lebih lanjut adalah graf buku. Graf buku adalah graf hasil kali Kartesian antara graf lintasan dengan dua titik dan graf bintang dengan n titik. Namun, penelitian yang membahas pewarnaan harmonik pada perluasan struktur graf buku masih sangat terbatas. Padahal dalam aplikasi seperti desain jaringan komunikasi atau topologi sistem terdistribusi, struktur graf hasil kali yang lebih kompleks sering kali lebih relevan karena merepresentasikan hubungan yang lebih realistis antartitik.

Penelitian ini berbeda dari penelitian sebelumnya karena berfokus pada penentuan algoritma pewarnaan harmonik dan bilangan kromatik harmonik pada graf hasil kali Kartesian antara graf lintasan dengan tiga titik dan graf bintang dengan n titik, yang merupakan ekstensi dari graf buku.

METODE

Metode penelitian yang dilakukan adalah studi pendahuluan, yakni peneliti mempelajari buku dan artikel yang berkaitan dengan graf, pewarnaan, bilangan kromatik, dan bilangan kromatik harmonik pada berbagai jenis graf. Berdasarkan hasil observasi, akan ditentukan algoritma pewarnaan harmonik pada graf yang telah ditentukan.

Berikut adalah penjelasannya.

1. Teori Graf

Definisi 1.1 (Graf). Sebuah graf G adalah sebuah objek yang terdiri atas sebuah himpunan berhingga dan tak kosong V yang unsur-unsurnya disebut titik dari graf G , bersama dengan sebuah himpunan E yang merupakan himpunan bagian dari pasangan tak terurut dari unsur-unsur pada himpunan V . Unsur himpunan E disebut sisi dari graf G .

Definisi 1.2 (Derajat). Derajat dari sebuah titik v , dinotasikan dengan $\deg(v)$, didefinisikan sebagai banyaknya sisi-sisi yang bertemu dengan titik v (Rahayuningsih, 2018).

Definisi 1.3 (Matriks *Adjacency*). Matriks *adjacency* dari sebuah graf G adalah sebuah matriks bujur sangkar $A = a_{ij}$ dengan ordo n yang setiap entrinya didefinisikan sebagai

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{if } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \end{cases}$$

Perhatikan bahwa dari Definisi 1.3, diperoleh bahwa

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ untuk semua } 1 \leq i, j \leq n$$

sehingga entrinya pastilah simetri secara diagonal, maka hal ini mengakibatkan matriks *adjacency* adalah sebuah matriks simetri.

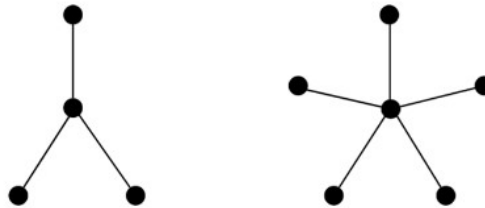
2. Graf Khusus

Definisi 2.1 (Graf Lintasan). Graf lintasan P_n adalah graf dengan n titik dan $(n - 1)$ sisi, yang berada pada sebuah lintasan terbuka (Gross *et al.*, 2014).



Gambar 1. Graf P_3 dan P_5

Definisi 2.2 (Graf Bintang). Graf bintang S_n adalah graf yang mempunyai $n + 1$ titik, dengan satu titik berderajat n yang dinamakan titik pusat, dan n titik berderajat satu (Irawati, 2013).



Gambar 2. Graf S_3 dan S_5

Definisi 2.3 (Graf Hasil Kali Kartesian). Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$. Hasil kali Kartesian $G \times H$ mempunyai himpunan titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, dimana setiap titik $G \times H$ merupakan sebuah pasangan terurut (u, v) , dengan $u \in V(G)$ dan $v \in V(H)$. Dua titik berbeda (u, v) dan (x, y) bertetangga di $G \times H$ jika $u = x$ dan $vy \in E(H)$ atau $v = y$ dan $ux \in E(G)$ (Chartrand & Zhang, 2012).

3. Pewarnaan Harmonik dan Bilangan Kromatik Harmonik

Definisi 3.1 (Pewarnaan Harmonik). Pewarnaan harmonik dari suatu graf G adalah pewarnaan yang menggunakan konsep pewarnaan titik, dimana setiap pasang warna muncul paling banyak satu kali. Secara formal, pewarnaan harmonik adalah sebuah fungsi c dari suatu himpunan warna C ke himpunan titik $V(G)$ sehingga untuk sembarang sisi e pada G , dengan titik ujung x, y dengan $c(x) \neq c(y)$, dan untuk setiap pasangan sisi e, e' dengan titik ujung masing-masing x, y dan x', y' , maka $\{c(x), c(y)\} \neq \{c(x'), c(y')\}$ (Vivin & Ali, 2009).

Definisi 3.2 (Bilangan Kromatik Harmonik). Bilangan kromatik harmonik χ_H adalah jumlah minimum warna yang dapat digunakan pada pewarnaan harmonik (Vivin & Ali, 2009).

4. Batas Bawah Bilangan Kromatik Harmonik

Proposisi 1. (Fran *et al.*, 2023) Jika pada graf G dapat dilakukan pewarnaan harmonik dengan w jenis warna, maka berlaku

$$\binom{w}{2} \geq |E(G)|.$$

Proposisi 2. (Fran *et al.*, 2023) Jika $\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum pada graf G dan graf G dapat diwarnai dengan w jenis warna, maka berlaku

$$w \geq \Delta(G) + 1.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

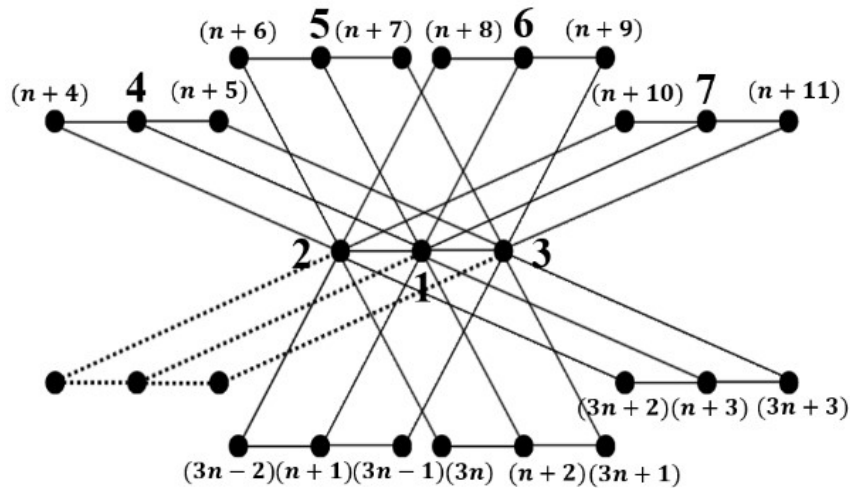
Sifat Graf Hasil Kali Kartesian $P_3 \times S_n$

Berdasarkan hasil observasi, diperoleh sifat-sifat graf hasil kali Kartesian $P_3 \times S_n$ adalah sebagai berikut.

1. Banyak titik pada graf $P_3 \times S_n$ adalah $3(n + 1)$.
2. Banyak sisi pada graf $P_3 \times S_n$ adalah $E(P_3 \times S_n) = 5n + 2$.
3. Derajat tertinggi pada graf $P_3 \times S_n$ adalah $\Delta(P_3 \times S_n) = n + 2$.

Matriks *Adjacency* Termodifikasi Graf $P_3 \times S_n$

Yang harus dilakukan sebelum membuat matriks *adjacency* termodifikasi adalah melakukan pewarnaan awal berupa nomor pada graf tersebut, dimulai dari tulang utama dari graf tersebut yang berada di tengah, dengan titik yang memiliki derajat paling tinggi dinomori dengan v_1 , dan titik-titik yang terhubung dengan titik tersebut dinomori dengan nomor v_2, v_3, v_4 , dan seterusnya. Selanjutnya, dilakukan penomoran pada titik sebelah kiri dan kanan pada masing-masing lembar secara berurutan. Titik sebelah kiri adalah titik yang ber-*adjacency* dengan titik v_2 , sedangkan titik sebelah kanan adalah titik yang ber-*adjacency* dengan titik v_3 . Perlu dicatat bahwa jumlah kolom atau baris pada matriks *adjacency* termodifikasi menyatakan jumlah warna yang digunakan pada graf tersebut.



Gambar 3. Pewarnaan Awal pada Graf $P_3 \times S_n$

Dan matriks *adjacency* termodifikasinya mempunyai ordo $3(n + 1) \times 3(n + 1)$.

$$P_3 \times S_n = \begin{bmatrix} A_{3 \times 3} & B_{3 \times n} & C_{3 \times 2n} \\ B_{n \times 3}^T & I_{n \times n} & D_{n \times 2n} \\ C_{2n \times 3}^T & D_{2n \times n}^T & I_{2n \times 2n} \end{bmatrix}$$

dengan

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{3 \times 2n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{n \times 2n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dan I adalah matriks identitas.

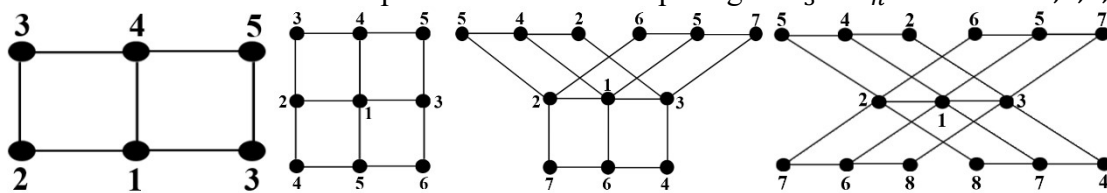
Diperoleh pula fakta bahwa matriks $P_3 \times S_n$ adalah matriks simetri.

Algoritma Pewarnaan Harmonik

1. Melakukan pewarnaan awal berupa nomor pada setiap titik pada graf, dinotasikan dengan v_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 3n + 3$), seperti pada Gambar 1. Pewarnaan titik nomor 1 dan titik yang ber-*adjacency* dengan nomor 1 tersebut, yakni nomor 2, 3, 4, $\dots$, $n + 3$ tidak akan berubah lagi.
2. Mengubah graf ke dalam matriks *adjacency* termodifikasi, dengan aturan diagonal matriksnya adalah 1.
3. Ketika titik v_i diwarnai dengan warna j , dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, 3(n + 1)$ dan $i > j$, maka entri kolom j menjadi penjumlahan entri kolom i dan j . Lalu hapus kolom dan baris i . Kemudian ganti entri baris j menjadi entri kolom j , sehingga terbentuklah matriks simetri.
4. Apabila entri matriks yang dihasilkan terdapat angka 2, maka warna tersebut tidak boleh digunakan untuk titik tersebut, karena hal itu berarti sudah terdapat pasangan warna yang sama dalam graf tersebut.
5. Jika entri matriks yang dihasilkan tidak terdapat angka 2, maka ulangi langkah 3. Jika entri matriks yang dihasilkan pada setiap iterasi selalu berisi angka 2, maka hal ini berarti tidak mungkin lagi terjadi penjumlahan entri antarkolom, sehingga iterasi dihentikan.
6. Jumlah kolom matriks setelah iterasi terakhir akan menjadi bilangan kromatik harmonik dari graf tersebut.

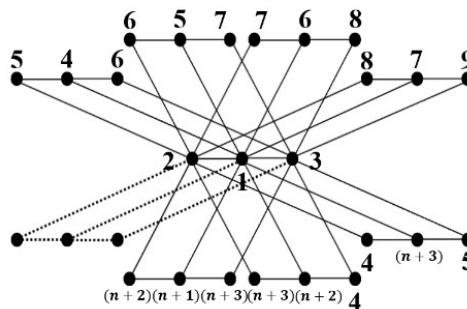
Perhatikan bahwa pewarnaan harmonik pada suatu graf tidaklah tunggal.

Berikut adalah salah satu contoh pewarnaan harmonik pada graf $P_3 \times S_n$ untuk $n = 1, 2, 3, 4$.



Gambar 4. Pewarnaan Harmonik pada Graf $P_3 \times S_n$ untuk $n = 1, 2, 3, 4$

Untuk graf $P_3 \times S_n$ dengan $n \geq 5$, terdapat salah satu pola pewarnaan harmonik khusus, yakni seperti gambar berikut.



Gambar 5. Pewarnaan Harmonik pada Graf $P_3 \times S_n$ untuk $n \geq 5$

TEOREMA.

Bilangan kromatik harmonik pada graf $P_3 \times S_n$ adalah sebagai berikut.

$$\chi_H = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n = 1 \\ 7, & \text{untuk } n = 2,3 \\ 8, & \text{untuk } n = 4 \\ n + 3, & \text{untuk } n \geq 5. \end{cases}$$

BUKTI.

Pertama, akan dibuktikan

$$\chi_H = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n = 1 \\ 7, & \text{untuk } n = 2,3 \\ 8, & \text{untuk } n = 4. \end{cases}$$

Akan dibuktikan batas bawah terlebih dahulu. Diperoleh banyak sisi graf $P_3 \times S_n$ adalah $5n + 2$. Maka berdasarkan Proposisi 1, diperoleh

$$\binom{\chi_H}{2} \geq 5n + 2$$

$$\chi_H(\chi_H - 1) \geq 10n + 4.$$

Maka diperoleh batas bawah bilangan kromatik harmoniknya adalah sebagai berikut.

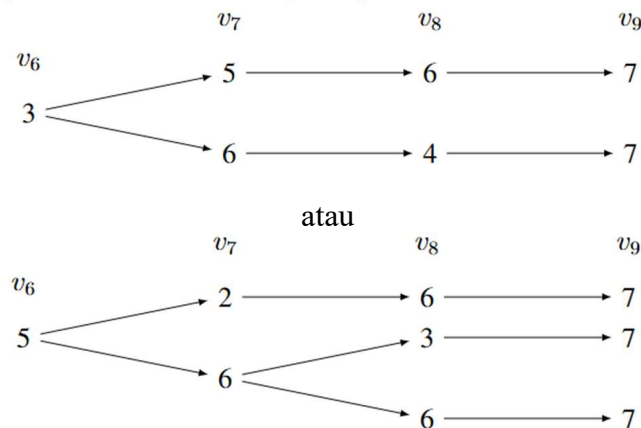
$$\chi_H \geq \begin{cases} 5, & \text{untuk } n = 1 \\ 6, & \text{untuk } n = 2 \\ 7, & \text{untuk } n = 3 \\ 8, & \text{untuk } n = 4. \end{cases}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan batas atasnya, yakni

$$\chi_H \leq \begin{cases} 5, & \text{untuk } n = 1 \\ 7, & \text{untuk } n = 2,3 \\ 8, & \text{untuk } n = 4. \end{cases}$$

Salah satu contoh pewarnaan harmonik pada Graf $P_3 \times S_n$ untuk $n = 1,2,3,4$ dapat dilihat pada Gambar 2. Banyak warna yang digunakan pada masing-masing graf secara berturut-turut adalah 5, 7, 7, dan 8 warna.

Namun, dapat dilihat bahwa batas bawah bilangan kromatik harmonik untuk graf $P_3 \times S_2$ adalah 6, sedangkan batas atasnya adalah 7. Maka pewarnaan harmonik untuk titik v_6, v_7, v_8, v_9 untuk graf $P_3 \times S_2$ dapat dilihat melalui diagram pohon berikut.



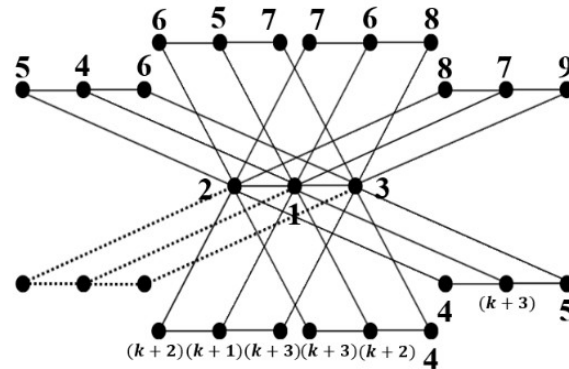
Gambar 6. Pewarnaan Harmonik pada Graf $P_3 \times S_2$ untuk Titik v_6, v_7, v_8, v_9

Dari diagram tersebut, diperoleh bahwa bilangan kromatik harmonik untuk graf $P_3 \times S_2$ adalah 7.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa

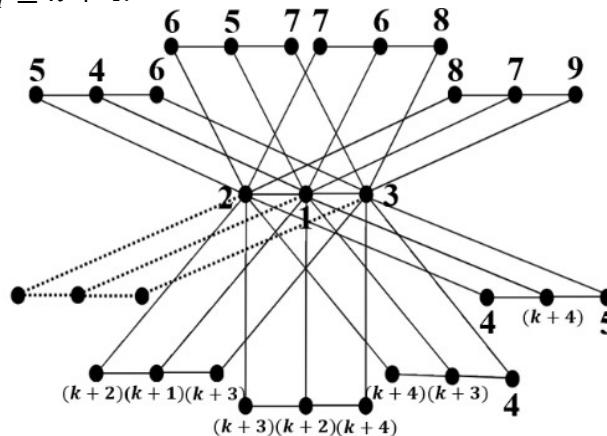
$$\chi_H = n + 3, \quad \text{untuk } n \geq 5.$$

Derajat maksimum pada graf $P_3 \times S_n$ adalah $n + 2$. Berdasarkan Proposisi 2, diperoleh batas bawahnya adalah $\chi_H \geq n + 3$. Selanjutnya, batas atas akan dibuktikan pewarnaannya dengan cara induksi. Akan dibuktikan bahwa $n = 5$ adalah benar. Artinya untuk $n = 5$, akan ditunjukkan $\chi_H \leq 8$. Berdasarkan sifat graf $P_3 \times S_n$, maka untuk $n = 5$, derajat tertinggi adalah 7, sehingga setidaknya diperlukan 7 warna ditambah dengan warna titik itu sendiri. Sehingga diperoleh $\chi_H \leq 8$. Anggap bahwa $n = k$ benar untuk $k \geq 5$. Hal ini berarti $\chi_H \leq k + 3$, dengan pola pewarnaan pada Gambar 5.



Gambar 7. Pewarnaan Harmonik pada Graf $P_3 \times S_n$ untuk $n = k$

Perhatikan bahwa $n = k + 1$ menunjukkan penambahan 1 lembar baru ke dalam grafik. Dalam pewarnaan harmoniknya, berarti harus ada penambahan setidaknya 1 warna baru di simpul tengah lembar baru. Selain itu, pewarnaan pada $n = k + 1$ selalu dapat dibentuk dari Gambar 5. Diperoleh bahwa $\chi_H \leq k + 4$.



Gambar 8. Pewarnaan Harmonik pada Graf $P_3 \times S_n$ untuk $n = k + 1$

KESIMPULAN

Bilangan kromatik harmonik pada Graf $P_3 \times S_n$ adalah sebagai berikut.

$$\chi_H = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n = 1 \\ 7, & \text{untuk } n = 2, 3 \\ 8, & \text{untuk } n = 4 \\ n + 3, & \text{untuk } n \geq 5. \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Afriantini, Helmi, & Fran, F. (2019). Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah pada Graf dan Penerapannya. *Bimaster*, 8, 773–782.
- Asy'ari, M. L., Dafik, Agustin, I. H., Nisviasari, R., & Adawiyah, R. (2022). On Graceful Chromatic Number of Some Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 2157, 1–10.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory*. New York: Dover

Publications.

- Edwards, K. J. (2013). Harmonious Chromatic Number of Directed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161, 369–376.
- Fran, F., Kusumastuti, N., & Robiandi. (2023). Bilangan Kromatik Harmonis pada Graf Payung, Graf Parasut, dan Graf Semi Parasut. *Jurnal Matematika, Sains, dan Teknologi*, 24, 15–22.
- Gross, J. L., Yellen, J., & Zhang, P. (2014). *Handbook of Graph Theory* (2nd ed.). USA: CRC Press.
- Imrich, W. & Klavzar, S. (2000). *Product Graphs: Structure and Recognition*. New Jersey: Wiley-Interscience.
- Irawati, D. (2013). Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, 2, 85–89.
- Leon, S. J. (2015). *Linear Algebra with Applications* (9th ed.). England: Pearson Education Limited.
- Lestari, D. D. A., Kristiana, A. I., Prihandini, R. M., Alfarisi, R., Setiawan, T. B., & Adawiyah, R. (2024). Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Sentripetal. *Jurnal Diferensial*, 6, 57–64.
- Rahayuningsih, S. (2018). *Teori Graph dan Penerapannya*. Malang: Universitas Wisnuwardhana Press Malang.
- Retnoningsih, I. I., Dafik, & Hussen, S. (2022). Pewarnaan Titik pada Keluarga Graf Sentripetal. *Journal of Mathematics and Applications*, 3.
- Robiandi, Kusumastuti, N., & Fran, F. (2021). Pewarnaan Harmonis pada Graf Lili dan Graf Pertemanan. *Bimaster*, 10, 317–322.
- Selinger, P. (2018). *Matrix Theory and Linear Algebra*. Washington, DC: The Saylor Foundation's Open Textbook Challenge.
- Sholikha, S.M., & Rahadjeng, B. (2014). Pewarnaan Harmonis Graf Garis, Graf Middle dan Graf Central dari Keluarga Graf Bintang Ganda. *MATHunesa*, 3, 93-97.
- Vivin, V. J., & Ali, A. M. M. (2009). On Harmonious Coloring of Middle Graph of $C(C_n)$, $C(K_{1,n})$, and $C(P_n)$. *Note di Matematica*, 29, 201–211.