

INDEKS HAMMING PADA GRAF OPERASI PERKALIAN KORONA DAN PERKALIAN KARTESIAN YANG DIBANGUN MATRIKS INSIDEN

Lolyta Damora Simbolon

Universitas HKBP Nomensen Medan, Sumatera Utara-Indonesia, 20235

Abstrak. Misalkan G merupakan graf sederhana yang berhingga direpresentasikan dalam matriks matriks insidensi B . Masing-masing setiap baris pada matriks B adalah barisan bilangan biner dengan panjangnya yang berhingga. Jarak Hamming dari dua titik v_i dan v_j dari graf G sederhana didefinisikan sebagai banyak posisi dari digit yang berbeda. Indeks Hamming dari suatu graf G sederhana adalah jumlah dari pada Jarak Hamming untuk semua titik-titik yang berbeda dalam graf. Misalkan masing-masing G_1 dan G_2 adalah graf sederhana yang masing-masing degree-nya hampir seragam. Melalui dari Indeks Hamming tersebut, maka diperoleh berupa formula Indeks Hamming pada graf yang berupa operasi perkalian korona dan perkalian kartesian dengan masing-masing kedua graf tersebut merupakan degree yang hampir seragam.

Kata kunci: graf, indeks Hamming, matriks insidensi, graf perkalian

Abstract. Suppose a finite simple graph is represented in the incidence matrix B . Each row in matrix B is a sequence of binary numbers with finite length. The Hamming distance of two vertices and of a simple graph G is defined as the number of positions of different digits. The Hamming index of a simple graph is the sum of the Hamming distances for all the different points in the graph. Suppose that each and is a simple graph whose degree is almost uniform. Using the Hamming Index, we obtain a formula for the Hamming Index on a graph in the form of corona multiplication and cartesian multiplication with each of the two graphs being of almost uniform degree.

Keywords: graph, Hamming index, incidence matrix, multiplication graph

Sitasi: Simbolon, L.D. 2023. Indeks Hamming pada Graf Operasi Perkalian Korona dan Perkalian Kartesian yang dibangun Matriks Insiden. MES (*Journal of Mathematics Educations and Science*), 8(2): 262-270.

Submit: 25 April 2023	Revisi: 29 April 2023	Publish: 30 April 2023
--------------------------	--------------------------	---------------------------

PENDAHULUAN

Graf sederhana G adalah salah satu objek matematika yang terdiri atas himpunan berhingga V yang elemen-elemennya disebut titik dan E yang elemen-elemennya disebut sisi, dimana untuk setiap dua titik dihubungkan dengan tidak lebih dari satu sisi dengan notasi $G = (V, E)$ (Diestel, 2005). Banyak elemen-elemen pada himpunan V dan E dapat dinotasikan dengan $|V|$ dan $|E|$. Matriks $(0, 1)$ adalah sebuah matriks dimana untuk entri-entri pada matriks bernilai 0 dan 1. Misalkan dua buah graf adalah graf sederhana. Jika kedua buah graf tersebut

dioperasikan sebuah operasi graf, maka pernyataan tersebut dapat dikatakan sebagai graf komposit.

Misalkan v_i dan v_j adalah dua titik sebarang dan terhubung dengan sisi e di G . Titik v_i bertetangga pada titik v_j dinotasikan sebagai $v_i \sim v_j$. Titik v_i insiden pada sisi e dinotasikan sebagai $v_i \sim e$. Tetangga dari suatu titik v_i di graf G adalah suatu himpunan titik-titik yang merupakan tetangga dari v_i , yang dinotasikan sebagai $N(v_i)$ (Diestel, 2005). Tetangga bersama pada v_i dan v_j adalah himpunan titik-titiknya merupakan tetangga dari kedua titik v_i dan v_j , yang dinotasikan sebagai $N(v_i, v_j)$ (Alwardi, *et al*, 2012). Banyak elemen-elemen pada himpunan $N(v_i)$ dinotasikan sebagai $|N(v_i)|$. *Degree* dari titik v_i yang dinotasikan sebagai $deg(v_i)$ adalah banyaknya titik v_i yang insiden terhadap sisi e (Diestel, 2005).

Barisan bilangan biner yang dinotasikan dengan $s(v_i)$ adalah barisan digit biner dengan panjang barisannya bergantung pada ordo matriksnya. Dalam hal ini, $s(v_i)$ diperoleh dari seluruh entri-entri kolom matriks insidensi dengan baris matriksnya ke- i , yang dapat dinotasikan dengan $(i, :)$. Bobot dari $s(v_i)$ atau $wt(s(v_i))$ disebut sebagai banyaknya digit bernilai 1 dalam $s(v_i)$ (Kolman *et al.*, 2002). Oleh pengertian dari $N(v_i)$, maka dapat dibuat bahwa $wt(s(v_i)) = deg(v_i)$.

Misalkan masing-masing dari pada graf G_1 dan G_2 merupakan graf sederhana. Jika kedua graf tersebut dioperasikan dengan operasi tertentu, maka hasil operasi tersebut dapat dikatakan sebagai Graf Operasi. Graf operasi diperkenalkan pada kasus di bidang jaringan maupun kombinatorik komputasi. Terdapat banyak operasi yang digunakan untuk melakukan pengoperasian dua buah graf, salah satunya graf operasi perkalian. Graf perkalian kartesius diperkenalkan oleh Avgustinovich dan Fon-Der-Flaass (2000) yang dimana, mereka telah meneliti konsep sifat-sifat ruang metrik dan sekaligus memberikan pembuktian secara lebih transparan. Selain operasi tersebut, graf perkalian korona diperkenalkan oleh Frucht dan Harary (1970). Frucht dan Harary menjelaskan sifat-sifat keterhubungan antara kedua graf G_1 dan G_2 berdasarkan operasi perkalian korona.

Dalam graf G diperkenalkan dengan dua istilah konsep jarak antara dua titik dalam suatu graf, yakni jarak biasa (*distance*) dan jarak Hamming. Jarak biasa didasarkan pada banyaknya sisi-sisi yang dikandung oleh lintasan terpendek yang menghubungkan antara kedua titik. Sedangkan, untuk Jarak Hamming didasarkan kepada representasi matriks $(0, 1)$ dari pada graf G .

Jika graf G direpresentasikan ke dalam bentuk titik dan sisi, maka yang dimaksud dengan *path* adalah barisan dari sisi yang terhubung diantara titik-titik dengan syarat titiknya berbeda (Kolman *et al.*, 2002). Panjang dari *path* adalah banyaknya sisi yang dilalui kedua titik. Jarak biasa antara titik v_i dan v_j dinotasikan dengan $d_G(v_i, v_j)$ adalah panjang lintasan *path* yang terpendek (Diestel, 2005).

Jika graf G direpresentasikan kedalam bentuk matriks $(0, 1)$, maka setiap barisan digit biner dari matriks $(0, 1)$ dapat didefinisikan sebagai Jarak Hamming. Jarak Hamming diantara dua titik graf v_i dan v_j adalah banyak posisi dengan digit yang berbeda (Hamming, 1950). Atau dapat dinyatakan dalam bentuk $H_d(v_i, v_j : Z) = wt(Z(i, :) \oplus_2 Z(j, :))$ dengan Z merupakan sebuah representasi dari graf yang dibangun dengan matriks $(0,1)$.

Jarak $d_G(v_i, v_j)$ sudah digunakan pada penelitian Wiener (1947) dengan istilah Indeks Wiener. Indeks Wiener adalah jumlahan semua jarak antara dua titik yang berbeda. Indeks Wiener dinotasikan dengan $W(G)$, yakni

$$W(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq |V|} d_G(v_i, v_j)$$

Dalam penelitian Indeks Wiener sudah diteliti bentuk-bentuk dari grafnya seperti dalam penelitian Ravenkar *et al.* (2012) mengenai hubungan graf garis dengan graf komplit, dan Eliasi *et al.* (2012) mengenai graf Mycielski dan graf komposit.

Latar belakang dari pada Indeks Wiener hanya didasarkan untuk pengantar, yang dimana untuk memperoleh berupa bentuk persamaan baru yaitu Indeks Hamming. Melalui dari persamaan Indeks Wiener, penelitian Ramane dan Ganagi (2013) mendefinisikan Indeks Hamming sebagai berikut $H(G:Z)$

$$H(G:Z) = \sum_{1 \leq i < j \leq |V|} H_d(v_i, v_j : Z)$$

Dalam penelitian Ali, *et al.* (2019b) telah meneliti Indeks Hamming dari graf komposit yang dibangun dengan matriks ketetanggaan. Berdasarkan latar belakang di atas, pada penelitian ini akan membahas Indeks Hamming terhadap graf perkalian korona dan graf perkalian kartesian dengan graf yang nilai *degree*-nya hampir seragam. Tujuan dari pada penelitian ini adalah untuk dapat menentukan hasil formula sederhana dari pada Indeks Hamming terhadap graf operasi perkalian korona dan kartesian.

GRAF

Menurut Diestel (2005), Andaikan $V \neq \emptyset$ adalah sebuah himpunan berhingga dan misalkan $[V]^2 = \{\{u, v\} : u, v \in V \text{ dan } u \neq v\}$. Sebuah graf G adalah sebuah pasangan (V, E) dengan $E \subseteq [V]^2$. Sebuah graf G yang direpresentasikan oleh pasangan (V, E) dinotasikan dengan $G(V, E)$. Pada graf $G(V, E)$, himpunan V adalah himpunan titik-titik dan E adalah himpunan sisi-sisi dari G . Agar lebih spesifik, himpunan V dan E pada sebuah graf G dinotasikan $V(G)$ dan $E(G)$. Jika G adalah sebuah graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_s\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_t\}$, maka graf G disebut sebagai graf- (s, t) .

Teorema 1. (Diestel, 2005) Jika graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_s\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_t\}$, maka $\sum_{i=1}^s \deg(v_i) = 2t$

Bukti. Untuk setiap sisi $e = \{v_i, v_j\}$ menghasilkan 2 dari total *degree* pada titik-titik. Masing-masing *degree* pada kedua titik v_i dan v_j bernilai satu. Hal ini berakibat bahwa total *degree* dari semua titik pada graf G adalah dua kali dari pada banyaknya sisi-sisi pada graf G .

Akibat : Sebuah graf G terdapat genap buah titik yang mempunyai *degree* ganjil.

Bukti. Misalkan $v_i \in V(G)$. Himpunan $V(G)$ dipartisi menjadi dua yaitu himpunan VO dan VE . Himpunan VO adalah himpunan titik-titik dengan *degree* yang ganjil, dan VE adalah himpunan titik-titik dengan *degree* yang genap. Sehingga

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i) = \sum_{v_i \in VO} \deg(v_i) + \sum_{v_i \in VE} \deg(v_i)$$

Oleh persamaan pada teorema (2.1.4), maka $\sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i) = 2t$

$$2t = \sum_{v_i \in VO} \deg(v_i) + \sum_{v_i \in VE} \deg(v_i)$$

Akibatnya,

$$\sum_{v_i \in VO} \deg(v_i) = 2t - \sum_{v_i \in VE} \deg(v_i)$$

Karena untuk setiap $v_i \in V$, E ber-degree genap, maka untuk persamaan $2t - \sum_{v_i \in VE} \deg(v_i)$ bernilai genap. Karena $v_i \in V$, O ber-degree ganjil, maka terdapat buah titik pada V , O . Sehingga terdapat genap buah titik yang ber-degree ganjil. $\square$

Sebuah graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Matriks tersebut ialah matriks insidensi. Sebuah matriks insidensi $B = (b_{ij})$ dari sebuah graf- (s, t) adalah matriks berordo $s \times t$ dengan entri b_{ij} , $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$ yang didefinisikan oleh:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } v_i \sim e_j \\ 0 & \text{jika } v_i \not\sim e_j \end{cases}$$

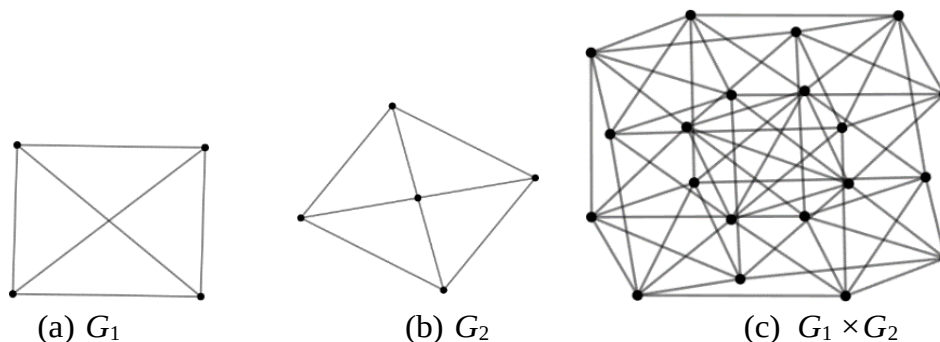
GRAF OPERASI PERKALIAN KARTESIUS

Definisi: Menurut Avgustinovich dan Fon-Der-Flaass (2000), Graf perkalian kartesius dari dua buah graf G_1 dan G_2 adalah graf $G_K = G_1 \times G_2$ dengan himpunan titik pada graf G_K yang dinotasikan dengan $V(G_K) = \{(v_i, u_j) : v_i \in V(G_1) \text{ dan } u_j \in V(G_2)\}$ dan himpunan sisi pada graf G_K , $E(G_K)$ didefinisikan sebagai kedua titik (v_i, u_j) dan (v_i', u_j') bertetangga jika dan hanya jika salah satunya, yakni

a $v_i = v_i'$ dan $u_j \sim u_j'$ di dalam G_2 , atau

b $u_j = u_j'$ dan $v_i \sim v_i'$ di dalam G_1 .

Berdasarkan definisi (2.2.1), bahwa untuk himpunan $V(G_K) = \{(v_i, u_j) : v_i \in V(G_1) \text{ dan } u_j \in V(G_2)\}$ dan $E(G_K) = \{e_{ij} : i = 1, 2, \dots, t_2 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, s_1\} \cup \{f_{ij} : i = 1, 2, \dots, t_1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, s_2\}$. Banyak elemen-elemen dari himpunan $V(G_K)$, yang dinotasikan dengan $|V(G_K)|$ adalah s_{G_K} dan banyak elemen-elemen dari himpunan $E(G_K)$, yang dinotasikan dengan $|E(G_K)|$ adalah t_{G_K} . Untuk $1 \leq i \leq s_1$ dan $1 \leq j \leq s_2$



Gambar 1 (a) Graf G_1 , (b) Graf G_2 , (c) Graf $G_K = G_1 \times G_2$

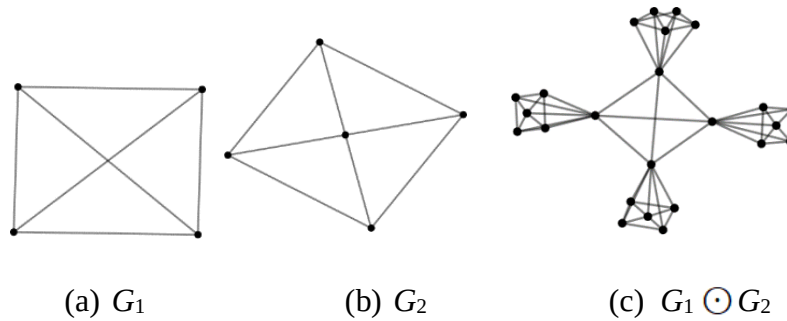
Maka melalui persamaan s_{G_K} dan t_{G_K} dapat diperoleh sebagai berikut:

$$s_{G_K} = s_1 s_2$$

$$t_{G_K} = t_1 s_2 + t_2 s_1$$

GRAF OPERASI PERKALIAN KORONA

Definisi : Menurut Frucht dan Harary (1970), Graf perkalian korona dari dua buah graf G_1 dan G_2 adalah graf $G_C = G_1 \odot G_2$, yang dimana mengambil G_1 dan menyalin G_2 sebanyak s_1 buah, kemudian setiap titik salinan G_2 dihubungkan satu persatu ke titik salinan G_1 .



Gambar 2 (a) Graf G_1 , (b) Graf G_2 , (c) Graf $G_C = G_1 \odot G_2$

Berdasarkan definisi (2.2.4), maka bahwa himpunan $V(G_C) = V(G_1) \cup \{(v_i, u_j) : i = 1, 2, \dots, s_1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, s_2\}$ dan himpunan $E(G_C) = E(G_1) \cup \{f_{ij} : i = 1, 2, \dots, s_1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, t_2\} \cup \{e_{ij} : i = 1, 2, \dots, s_1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, s_2\}$. Banyak elemen-elemen dari himpunan $V(G_C)$, yang dinotasikan dengan $|V(G_C)|$ adalah s_{G_C} dan banyak elemen-elemen dari himpunan $E(G_C)$, yang dinotasikan dengan $|E(G_C)|$ adalah t_{G_C} . Maka melalui persamaan s_{G_C} dan t_{G_C} dapat diperoleh sebagai berikut:

$$s_{G_C} = s_1(s_2 + 1)$$

$$t_{G_C} = t_1 + s_1 t_2 + s_1 s_2$$

INDEKS HAMMING

Definisi: Menurut Ramane dan Ganagi (2013), Andaikan graf sederhana G yang direpresentasikan dalam bentuk matriks Z . Indeks Hamming dari suatu graf G adalah

$$H_Z(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq s} H_d(v_i, v_j; Z)$$

Algoritma 1. Indeks Hamming

1. Memulai program
2. Mendeklarasikan matriks Z , Hd , dan $H_Z = 0$
3. *for* $i=1$ sampai $s - 1$
4. *for* $j=i+1$ sampai s
5. $Hd = (Z(i, :) + Z(j, :)) \bmod 2$
6. $H_Z = H_Z + wt(Hd)$

7. end
8. end
9. Menampilkan hasil akhir Hz
10. Program berakhir

Teorema 2. Jika B adalah matriks insidensi dari sebuah graf sederhana G , maka Indeks Hamming dari suatu graf G (Ali *et al.*, 2019a) adalah

$$H_B = 2t(s - 2)$$

Bukti: Menurut teorema (2.3.5), Jarak Hamming yang dibangun oleh matriks insiden adalah

$$H_d(v_i, v_j : B) = \begin{cases} \deg(v_i) + \deg(v_j) - 2 & \text{jika } v_i \sim v_j \\ \deg(v_i) + \deg(v_j) & \text{jika } v_i \not\sim v_j \end{cases}$$

Sehingga persamaan $H_B(G)$ adalah

$$\begin{aligned} H_B(G) &= \sum_{1 \leq i < j \leq s} H_d(v_i, v_j : B) \\ H_B(G) &= \sum_{v_i \sim v_j} H_d(v_i, v_j : B) + \sum_{v_i \not\sim v_j} H_d(v_i, v_j : B) \\ H_B(G) &= \sum_{v_i \sim v_j} (\deg(v_i) + \deg(v_j) - 2) + \sum_{v_i \not\sim v_j} ((\deg(v_i) + \deg(v_j))) \\ H_B(G) &= \sum_{1 \leq i < j \leq s} ((\deg(v_i) + \deg(v_j))) - \sum_{v_i \sim v_j} 2 \end{aligned}$$

Ekspresi pertama adalah $\sum_{1 \leq i < j \leq s} ((\deg(v_i) + \deg(v_j)))$. Perhatikan untuk $i = 1, 2, 3, \dots, s$ tiap ekspresi $\deg(v_i)$ yang muncul pada jumlahan $\sum_{1 \leq i < j \leq s} ((\deg(v_i) + \deg(v_j)))$ sebanyak $(s - 1)$ kali. Sehingga

$$\sum_{1 \leq i < j \leq s} ((\deg(v_i) + \deg(v_j))) = \sum_{i=1}^s (s - 1) \deg(v_i) = 2t(s - 1)$$

Ekspresi kedua adalah $\sum_{v_i \sim v_j} 2$. Perhatikan bahwa ekspresi $v_i \sim v_j$ menyatakan untuk setiap titik v_i bertetangga pada titik v_j . Akibatnya, total dari $\sum_{v_i \sim v_j} 2$ adalah sebanyak t . Sehingga

$$\sum_{v_i \sim v_j} 2 = 2t$$

Dengan mensubstitusikan hasil persamaan $\sum_{1 \leq i < j \leq s} ((\deg(v_i) + \deg(v_j)))$ dan $\sum_{v_i \sim v_j} 2$, maka Indeks Hamming dari graf G adalah

$$H_B = 2t(s - 1) - 2t = 2t(s - 2)$$

INDEKS HAMMING DARI GRAF OPERASI PERKALIAN YANG DIBANGUN OLEH MATRIKS INSIDENSI

Pada subbab ini akan diperlihatkan Indeks Hamming pada graf perkalian yang dibangun dengan matriks insidensi B . Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf sederhana yang masing-masing dibangun dengan matriks insidensi B_1 dan B_2 . Berdasarkan teorema 2, maka Indeks Hamming dari graf G_1 dan G_2 adalah

$$H_{B_1}(G_1) = 2t_1(s_1 - 2),$$

$$H_{B_2}(G_2) = 2t_2(s_2 - 2)$$

Teorema 3. Misalkan B adalah matriks insidensi dari graf G_K dengan $G_K = G_1 \times G_2$. Sehingga Indeks Hamming dari graf G_K adalah

$$H_B(G_K) = s_2^2 H_{B_1}(G_1) + s_1^2 H_{B_2}(G_2) + 4(t_1 s_2 (s_2 - 1) + t_2 s_1 (s_1 - 1))$$

Bukti. Melalui persamaan banyak titik $s_{G_K} = s_1 s_2$ dan sisi $t_{G_K} = t_1 s_2 + t_2 s_1$ dari pada graf operasi perkalian kartesian. Maka diperoleh hasil Indeks Hamming adalah:

$$H_B(G_K) = 2t_{G_K}(s_{G_K} - 2)$$

$$H_B(G_K) = 2(t_1 s_2 + t_2 s_1)(s_1 s_2 - 2)$$

$$H_B(G_K) = (2t_1 s_2 + 2t_2 s_1)(s_1 s_2 - 2) = 2t_1 s_1 s_2^2 + 2t_2 s_1^2 s_2 - 4t_1 s_2 - 4t_2 s_1$$

$$H_B(G_K) = s_2^2(2t_1(s_1 - 2)) + s_1^2(2t_2(s_2 - 2)) + 4(t_1 s_2 (s_2 - 1) + t_2 s_1 (s_1 - 1))$$

Dengan menggunakan persamaan

$$H_{B_1}(G_1) = 2t_1(s_1 - 2),$$

$$H_{B_2}(G_2) = 2t_2(s_2 - 2)$$

maka, hasil dari Indeks Hamming dari graf perkalian kartesian adalah

$$H_B(G_K) = s_2^2 H_{B_1}(G_1) + s_1^2 H_{B_2}(G_2) + 4(t_1 s_2 (s_2 - 1) + t_2 s_1 (s_1 - 1))$$

Teorema 4. Misalkan B adalah matriks insidensi dari graf G_C dengan $G_C = G_1 \odot G_2$. Sehingga Indeks Hamming dari graf G_C adalah

$$H_B(G_C) = (s_2 + 1)H_{B_1}(G_1) + s_1^2 H_{B_2}(G_2) + 4(s_2 t_1 - s_1 t_2) + 2s_1 s_2 (s_1 s_2 + s_1 - 2) + 6s_1^2 t_2$$

Bukti. Melalui persamaan banyak titik $s_{G_C} = s_1(s_2 + 1)$ dan sisi $t_{G_C} = t_1 + s_1 t_2 + s_1 s_2$ dari pada graf operasi perkalian korona. Maka diperoleh hasil Indeks Hamming adalah:

$$H_B(G_C) = 2t_{G_C}(s_{G_C} - 2)$$

$$H_B(G_C) = 2(t_1 + s_1 t_2 + s_1 s_2)(s_1(s_2 + 1) - 2)$$

$$H_B(G_C) = (2t_1 + 2s_1 t_2 + 2s_1 s_2)(s_1 s_2 + s_1 - 2)$$

$$H_B(G_C) = 2t_1 s_1 s_2 + 2t_1 s_1 - 4t_1 + 2s_1^2 s_2 t_2 + 2s_1^2 t_2 - 4s_1 t_2 + 2(s_1 s_2)^2 + 2s_1^2 s_2 - 4s_1 s_2$$

$$H_B(G_C) = (s_2 + 1)(2t_1(s_1 - 2)) + s_1^2(2t_2(s_2 - 2)) + 6s_1^2t_2 - 4s_1t_2 + 4s_2t_1 \\ + 2s_1s_2(s_1s_2 + s_1 - 2)$$

$$H_B(G_C) = (s_2 + 1)(2t_1(s_1 - 2)) + s_1^2(2t_2(s_2 - 2)) + 4(s_2t_1 - s_1t_2) \\ + 2s_1s_2(s_1s_2 + s_1 - 2) + 6s_1^2t_2$$

Dengan menggunakan persamaan

$$H_{B_1}(G_1) = 2t_1(s_1 - 2),$$

$$H_{B_2}(G_2) = 2t_2(s_2 - 2)$$

maka, hasil dari Indeks Hamming dari graf perkalian korona adalah

$$H_B(G_C) = (s_2 + 1)H_{B_1}(G_1) + s_1^2H_{B_2}(G_2) + 4(s_2t_1 - s_1t_2) + 2s_1s_2(s_1s_2 + s_1 - 2) + 6s_1^2t_2$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka diperoleh masing-masing hasil formula Indeks Hamming dari graf operasi perkalian korona dan perkalian kartesian, dengan representasi graf operasi tersebut memiliki *degree* yang hampir seragam, yakni:

- a. $H_B(G_K) = s_2^2H_{B_1}(G_1) + s_1^2H_{B_2}(G_2) + 4(t_1s_2(s_2 - 1) + t_2s_1(s_1 - 1))$
 $H_B(G_C) = (s_2 + 1)H_{B_1}(G_1) + s_1^2H_{B_2}(G_2) + 4(s_2t_1 - s_1t_2) + 2s_1s_2(s_1s_2 + s_1 -$
- b. $2) + 6s_1^2t_2$

Meliputi dari formula tersebut menunjukkan bahwasannya, Indeks Hamming pada graf perkalian kartesian dapat dilakukan secara komutatif. Sedangkan Indeks Hamming pada graf perkalian korona tidak bisa dilakukan secara komutatif. Sebab, graf perkalian korona bergantung dari pada banyaknya s_1 buah titik.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, S., Farisah, L. dan Husna, W. 2019a. Indeks Hamming dari Graf Hasil Perkalian Kartesius pada Matriks Insidensi Titi-Sisi. Seminar Nasional Matematika dan Terapan, (1), 412-417.
- Avgustinovich dan Fon-Der-Flaass. 2000. *Cartesian Products of Graphs and Metric Spaces*, *Europ. J. Combinatoric*, (21), 847-851.
- Diestel. 2005. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag Heidelberg.
- Dorbynin dan Kochetova. 1994. *Degree Distance of A Graph: A Degree Analogue of The Wiener Index*. *Journal of Chemical Information and Computer Science*, (34), 1087-1089.
- Eliasi, M., Raeisi, G. dan Taeri, B. 2012. *Wiener Index of Some Graph Operations*. *Discrete Applied Mathematics*, (160), 1333-1344.
- Frucht dan Harary. 1970. *On the Corona of Two Graphs*. *Aequationes Mathematicae*, (4), No. 3, 322-325.
- Hamming, R. W. 1950. *The Bell System Technical Journal*. American Telephone and Telegraph Company, (29), No. 2, 147-160.

- Kolman. B., Busby, R. dan Ross, S. 2005, *Discrete Mathematical Structures*, Prentice Hall of India, New Delhi.
- Pasaribu, R., Mardiningsih dan Suwilo, S. 2018. *Hamming Index of Thorn and Double Graphs*, *Bulletin of Mathematics*, (10), No. 1, 25-32.
- Paulraja dan Agnes. 2014. *Degree Distance of Product Graphs*. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, (6).
- Pemmaraju dan Skiena. 2003. *Computational Discrete Mathematics : Combinatorics and Graphs Theory with Mathematica*. New York : Cambridge University Press.
- Ramane, H. dan Ganagi, A. 2013. *Hamming Index of Class of Graphs*. *International Journal of Current Engineering and Technology*, 205 - 208.
- Ravenkar, D., Ramane, H. dan Ganagi, A. 2012. *On The Wiener Index of A Graph*. *J. Indones. Math. Soc.*, (18), 57-66.
- Rawat dan Pradhan. 2017. *Metric Dimension of Some Graphs under Join Operation*. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13, No. 7, 3331-3348.
- Wiener. 1947. *Structural Determination of Paraffin Boiling Points*. *J. Am. Chem. Soc.*, (69), No. 1, 17-20.
- Yalnaik, A., Ramane, H. dan Gudodagi, G. 2016. *Hamming Index Generated by The Incidence Matrix of Some Thorn Graphs*. *International Journal of Mathematical Archive*, (7), No. 8, 7-12.