OPEN ACCESS
MES: *Journal of Mathematics Education and Science*
ISSN: 2579-6550 (online) 2528-4363 (print)
Vol. 9, No. 1, Oktober 2023

Situs web: https://jurnal.uisu.ac.id/index.php/mesuisu
Email: jurnalmes@fkip.uisu.ac.id

ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT HIV/AIDS DENGAN EDUKASI DAN *ART TREATMENT*

Mohamad Syafi'i*
UIN Imam Bonjol, Padang, Sumatera Barat, Indonesia, 25171

La Ode Sabran
UIN Imam Bonjol, Padang, Sumatera Barat, Indonesia, 25171

Ilham Dangu Rianjaya
UIN Imam Bonjol, Padang, Sumatera Barat, Indonesia, 25171

Abstrak. *Model matematika seringkali digunakan untuk menjelaskan fenomena dalam bidang biologi, seperti penyebaran penyakit menular, salah satunya penyakit HIV/AIDS. Salah satu bentuk pengendalian HIV/AIDS yaitu dengan diberikan edukasi bahaya penyakit HIV/AIDS, dan melakukan ART treatment bagi individu positif HIV untuk meningkatkan kekebalan tubuh. Tujuan penelitian ini adalah analisis dinamik model matematika penyebaran HIV/AIDS dengan ART treatment dan edukasi. Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Penelitian ini mengembangkan model SITA, dengan menambahkan kompartemen individu rentan yang sadar terkait penyebaran HIV/AIDS dan menambahkan beberapa parameter pada model. Berdasarkan model matematikan yang digunakan diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, bilangan reproduksi dasar serta dilakukan analisis kestabilan disekitar titik kestabilan. Berdasarkan data yang digunakan, diperoleh simulasi penyebaran penyakit HIV/AIDS pada kedua titik kesetimbangan. Berdasarkan analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimstotik lokal jika* $R_0 < 1$.
Kata Kunci: *pemodelan matematika, pemodelan epidemiologi, titik kesetimbangan.*

Abstract. *Mathematical models are often used to describe phenomena in the field of biology, such as the spread of* infectious *diseases, one of which is HIV/AIDS. The prevention of HIV/AIDS is through education on the dangers of HIV/AIDS, and ART treatment for HIV positive individuals to increase immunity. The purpose of this study is to analyze the dynamic mathematical model of the transmission of HIV/AIDS with ART treatment and education. This research is a literature study. This study develops the SITA model, by including compartments of susceptible individuals who are aware of the spread of HIV/AIDS and add several parameters to the model. Based on the mathematical model used, two equilibrium points are obtained, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point, the basic reproduction number and stability analysis around the stability point. Based on the data used, a simulation of the transmission of HIV/AIDS was obtained at both equilibrium points. The stability analysis shows that the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable if* $R_0 < 1$.
Keywords: *epidemiology modeling, mathematical modeling, equilibrium point.*

Sitasi: Syafii, M., Sabran, L.O., & Rianjaya, I.D. 2023. Analisis Dinamika Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS dengan Edukasi dan ART Treatment. *MES (Journal of Mathematics Education and Science, 9(1): 31-44.*		
Submit: 28 September 2023	**Revisi:** 13 Oktober 2023	**Publish:** 18 Oktober 2023

*Corresponding Author: *mohamadsyafii@uinib.ac.id*

PENDAHULUAN

HIV (*human immunodefiency virus*) adalah virus yang merusak sistem kekebalan tubuh, dengan menginfeksi dan menghancurkan sel CD4. Semakin banyak sel CD4 yang dihancurkan, kekebalan tubuh akan semakin lemah, sehingga rentan diserang berbagai penyakit. Infeksi HIV yang tidak segera ditangani akan berkembang menjadi kondisi yang serius yang disebut AIDS (*Acquired Immune Defiency Syndrome*). AIDS adalah stadium akhir dari infeksi virus HIV. Pada tahap ini, kemampuan tubuh untuk melawan infeksi sudah hilang sepenuhnya (Lamusu et al., 2019).

Gejala HIV dibagi dalam beberapa tahap. Tahap pertama adalah tahap infeksi akut, dan terjadi pada beberapa bulan pertama setelah seseorang terinfeksi HIV. Pada tahap ini, sistem kekebalan tubuh orang yang terinfeksi membentuk antibodi untuk melawan virus HIV. Pada banyak kasus, gejala pada tahap ini muncul 1-6 bulan setelah infeksi terjadi. Penderita umumnya tidak menyadari telah terinfeksi HIV. Hal ini karena gejala yang muncul mirip dengan gejala penyakit flu, serta dapat hilang dan kambuh kembali. Setelah beberapa bulan, infeksi HIV memasuki tahap laten. Infeksi tahap laten dapat berlangsung hingga beberapa tahun atau dekade. Pada tahap ini, virus HIV semakin berkembang dan merusak kekebalan tubuh. Infeksi tahap laten yang terlambat ditangani, akan membuat virus HIV semakin berkembang. Kondisi ini membuat infeksi HIV memasuki tahap ketiga, yaitu AIDS (Faisah et al., 2018). Terapi *antrireroviral* merupakan terapi yang direkomendasikan untuk setiap individu yang terinveksi HIV. Terapi ini tidak bisa menyembuhkan HIV. Adapun beberapa manfaat terapi antrireroviral adalah menjaga kekebalan tubuh tetap kuat, mengurangi resiko terkena infeksi dan mengurangi menularkan HIV ke orang lain. Infeksi HIV cukup rentan terjadi karena penularannya bisa dengan mudah jika melakukan kontak langsung dengan cairan penderitanya seperti sperma, cairan vagina, darah, ataupun ASI. Salah satu bentuk pencegahan dini dalam penularan HIV adalah edukasi sejak dini terkait HIV/AIDS, tidak bergonta-ganti pasangan, melakukan hubungan seksual yang sehat dan aman, menghindari penggunaan jarum suntik secara bersama, dan rutin melakukan skrining HIV.

Model matematika seringkali digunakan untuk menjelaskan fenomena dalam bidang biologi, seperti penyebaran penyakit menular. Model matematika merupakan hasil rumusan matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan suatu proses yang menjelaskan permasalahan yang terjadi di dunia nyata ke dalam pernyataan matematis atau ke dalam suatu model matematika. Masalah nyata yang dihadapi dapat dimodelkan sesuai prinsip matematika sehingga dapat dilihat apakah model yang dihasilkan telah sesuai dengan rumusan (Saltina et al., 2022). Model epidemiologi merupakan salah satu model matematika yang banyak digunakan untuk memodelkan suatu kasus penyakit atau kasus lain yang bersifat menular. Pada umumnya, model ini banyak berfokus pada dinamik dari transmisi atau perpindahan ciri atau karakter antara individu dengan individu, populasi dengan populasi, komunitas dengan komunitas, daerah dengan daerah bahkan negara dengan negara. Penguraian model epidemiologi ke dalam bahasa matematika pada umumnya menggunakan bentuk persamaan differensial yang dibangun dari asumsi bahwa setiap fungsi dalam kompartemen model merupakan fungsi yang kontinu (Kasbawati, 2011).

Beberapa hasil penelititian sebelumnya terkait model matematika penyebaran HIV/AIDS adalah sebagai berikut: Penelitian yang dilakukan Haryanto dkk membagi populasi dengan 3 kompartemen, yaitu jumlah individu yang *susceptible* (S), jumlah individu yang *infected* (I), dan jumlah individu yang *AIDS cases* (A). berdasarkan pemodelan yang digunakan dan analisis kestabilan model pada penyebaran HIV-AIDS menghasilkan dua titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Berdasarkan rasio reproduksi dasar menunjukkan tingkat individu rentan dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi (Haryanto et al., 2015). Adapun penelitian yang dilakukan Lamusu dkk., hampir sama dengan yang dilakukan oleh Haryanto, dkk., perbedaannya adalah populasi dibagi pada dua kota dengan menggunakan model SIA kemudian dilakukan analisis dinamika penularan pada kedua populasi (Lamusu et al., 2019). Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Jafaruddin dkk. terkait analisis kestabilan model *host-vector* transmisi HIV/AIDS pada pengguna jarum suntik (Jafaruddin et al., 2017). Penelitian yang dilakukan Ogunlaran, dkk., menganalisis model matematika yang menggambarkan infeksi HIV dengan menambahkan dua variabel kontrol (Ogunlaran & Oukouomi Noutchie, 2016). Penelitian yang dilakukan oleh Maimunah, dkk., dengan menambahkan satu kompartemen *ART Treatment* (T) pada model SIA (Maimunah & Aldila, 2018). Penelitian yang dilakukan Arias, dkk., dengan menggunakan model SIA dan estimasi parameter (Arias et al., 2022). Selain itu terdapat penelitian yang dilakukan oleh Xuanpei Zhai, dkk. yang melakukan penelitian dengan memaparkan analisis dinamil model matematika transmisi HIV/AIDS dengan adanya efek kesadaran terhadap penyakit HIV/AIDS (Zhai et al., 2023). Berdasarkan penelitian sebelumnya, peneliti ingin melakukan pengembangan terkait analis dinamik penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan adanya edukasi dan *ARV Treatment* dengan mengembangkan model yang dibuat oleh Xuanpei Zhai dkk, dengan menambahkan paramater proporsi individu yang rentan dan sadar terkait HIV/AIDS dan parameter laju perpindahan terinfeksi HIV dan melakukan *ART Treatment* menjadi individu terinfeksi AIDS karena adanya infeksi oportunistik.

Berdasarkan data SIHA jumlah kumulatif ODHIV (kasus HIV) yang dilaporkan sampai dengan Juni 2022 sebanyak 338.760 orang, sedangkan jumlah kumulatif kasus AIDS yang dilaporkan sampai dengan Juni 2022 sebanyak 140.024 orang. Oleh karena itu, pentingnya peningkatan dalam pengendalian penyakit HIV/AIDS di Indonesia. Pengendalian penyakit HIV berfokus pada *testing* atau skrining pada populasi kunci serta pemberian *ART Treatment* pada individu yang terinfeksi untuk meningkatkan kekebalan tubuh dan menghambat laju pertumbuhan virus. Pengendalian juga bisa dilakukan dalam bentuk upaya peningkatan kampanye HIV/AIDS sebagai bentuk edukasi untuk individu yang rentan tertular dan edukasi dini pada kalangan remaja. Adanya edukasi terkait HIV/AIDS bisa menjadi salah satu pencegahan penyebaran HIV. Pengelolaan dalam pengendalian penyakit menular memerlukan pemodelan pola penyebaran penyakit, estimasi sumber daya pemeriksaan skrining, dan logistik pengobatan yang dibutuhkan. Perhitungan sumber daya ini, memerlukan proyeksi jumlah individu yang terinfeksi HIV, sehingga pengelolaan dalam pengendalian penyebaran penyakit dapat efektif dan efisien. Matematika epidemiologi dapat digunakan untuk mempelajari pola penyebaran penyakit dan pengendalian dengan membuat skema penyebaran model epidemik yang didalamnya juga memuat laju infeksi, laju kematian alami, dan laju kematian karena penyakit pada suatu populasi.

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, pada penelitian ini akan dikaji tentang analisis dinamik model penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan edukasi dan *ART Treatment*. Pada penelitian ini, pada model sebelumnya akan diberikan tambahan parameter dan mengurangi beberapa parameter, kemudian dilakukan pengkajian terkait eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model. Setelah itu solusi model disimulasikan secara numerik dengan bantuan *Software* MATLAB.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Studi literatur merupakan penelitian yang didasarkan pada informasi dan data yang diperoleh dari karya tertulis seperti buku, artikel ilmiah, dan sumber lainnya (Sugiyono, 2015). Penggunaan tinjauan pustaka sebagai metode penelitian menjadi lebih penting dari sebelumnya. Metode yang lebih sistematis dalam menyusun dan merangkum penelitian sebelumnya, dan dapat secara tidak langsung mampu meningkatkan cara berpikir dalam pengembangan penelitian berdasarkan tinjauan literatur yang telah dijadikan referensi (Snyder, 2019). Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari artikel yang digunakan sebagai referensi.

Adapun langkah-langkah yang diterapkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Kontruksi model penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan edukasi dan *ART Treatment*.
2. Analisis dinamika model meliputi eksistensi titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar (R_0) dan analisis kestabilannya.

Sistem Otonomus

Sistem otonomus merupakan sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

dengan fungsi f_i adalah fungsi kontinu dan tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t untuk $i = 1, 2, \dots, n$ (Finizio & Ladas, 1988).

Definisi Titik Kesetimbangan

Perhatikan sistem otonomus (1). Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ yang memenuhi $f_1(\vec{x}^*) = f_2(\vec{x}^*) = \cdots = f_n(\vec{x}^*)$ disebut titik kritis sistem otonomus (2). Titik kritis $\vec{x}^*$ merupakan solusi sistem (1) yang bernilai konstan, sebab nilai $\frac{dx_1}{dt} = \cdots = \frac{dx_n}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx_1}{dt} = \cdots = \frac{dx_n}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis disebut juga titik kesetimbangan (Finizio & Ladas, 1988)

Definisi Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ sistem (1) dikatakan

1) stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}_t$ yang memenuhi $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$ maka berlaku $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0$
2) stabil asimtotik, jika stabil dan $\exists \delta_0 > 0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $\vec{x} = \vec{x}_t$ yang memenuhi $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$, maka $\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$.
3) tak stabil, jika titik tersebut tidak memenuhi kriteria (1).

Kestabilan asimtotik berarti titik kesetimbangan stabil dan trayektori solusi-solusi lain di sekitarnya akan konvergen menuju titik kesetimbangan untuk $t \to \infty$ (Boyce & Diprima, 2009).

Teorema 1

Diberikan matriks Jacobian $J_{(x_1^*, \dots, x_n^*)}$ dari sistem otonomus non-linier

1) Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $J_{(x_1^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai negatif, maka titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ dari sistem bersifat stabil asimtotik lokal.
2) Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J_{(x_1^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai positif, maka titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ dari sistem bersifat tidak stabil (Perko, 2000)

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai jumlah rata-rata kasus infeksi yang disebabkan oleh individu terinfeksi di suatu populasi yang semuanya rentan untuk terinfeksi, dan biasanya dinotasikan dengan R_0. Parameter R_0 mempunyai nilai ambang batas 1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan hilang dari suatu populasi. Tetapi, jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan endemik atau penyakit tetap ada pada populasi. Penentuan bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar dari matriks generasi selanjutnya (*next generation matrix*) (Driessche & Watmough, 2002).

3. Simulasi numerik model berdasarkan nilai parameter yang diperoleh.
4. Interpretasi hasil simulasi yang diperoleh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

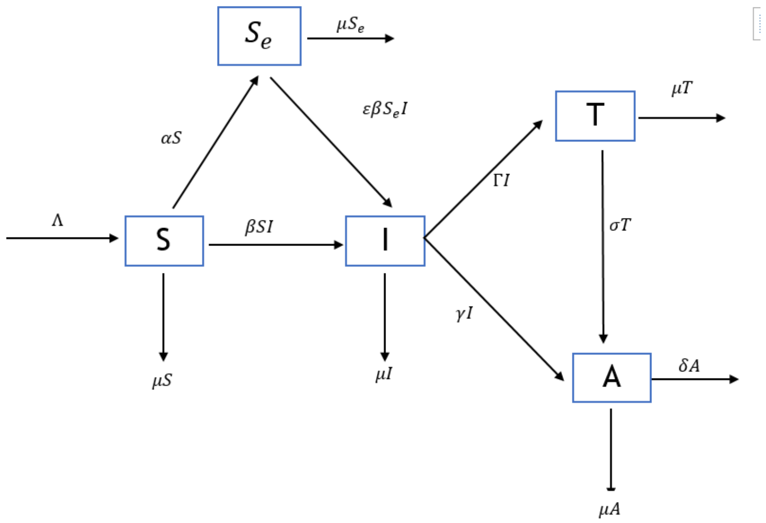
Model matematika yang digunakan dalam penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan *ART Treatment* dan edukasi yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari 5 kompartemen yaitu individu yang rentan yang tidak mempunyai kesadaran terhadap penyakit HIV/AIDS (S), individu yang rentan yang telah diberikan edukasi dan sadar terhadap penyakit HIV/AIDS (S_e), individu yang sudah terinveksi HIV (I), Individu yang terinfeksi HIV dan melakukan *ART Treatment* (T), dan individu yang terifeksi AIDS (A). Asumsi pembentukan model matematika penyebaran HIV/AIDS dengan *ART Treatment* dan edukasi adalah sebagai berikut:

1. Populasi diasumsikan tertutup, artinya tidak ada individu masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi
2. Populasi diasumsikan homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lainnya
3. Laju rekrutmen terjadi pada setiap subpopulasi dan masuk ke dalam individu yang rentan yang tidak mempunyai kesadaran terhadap penyakit HIV/AIDS (S) dan kematian alami juga terjadi pada setiap kompartemen
4. Terdapat kematian untuk individu yang terifeksi AIDS (A)
5. Individu pada kompartemen S dapat berubah menjadi S_e setelah diberikan edukasi dan sadar terhadap penyakit HIV/AIDS
6. Terdapat 2 kemungkinan setelah individu terinferksi HIV, yaitu melakukan pengobatan, dan terinfeksi AIDS
7. Individu yang melakukan pengobatan bisa terinfeksi AIDS karena adanya infeksi oportunistik.

Adapun parameter yang digunakan dalam model matematika yang digunakan dalam penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan *ART Treatment* dan edukasi adalah sebagai berikut:

Λ : Laju rekrutmen
β : Laju kontak individu yang rentan dengan individu terinfeksi AIDS
α : Laju perpindahan dari individu yang rentan yang tidak mempunyai kesadaran terhadap penyakit
HIV/AIDS menjadi individu yang rentan yang telah diberikan edukasi dan sadar terhadap penyakit
HIV/AIDS.
ε : Proporsi S_e menjadi individu terinfeksi AIDS
Γ : Laju perpindahan individu terinfeksi HIV menjadi individu terinfeksi HIV dan melakukan *ART*
Treatment
γ : Laju perpindahan individu terinfeksi HIV menjadi individu terinfeksi AIDS
σ : Laju perpindahan individu terinfeksi HIV dan melakukan *ART Treatment*
menjadi individu terinfeksi AIDS
δ : Laju kematian karena AIDS
μ : Laju kematian alami

Secara skematis model matematika penyebaran HIV/AIDS dengan *ART Treatment* dan edukasi disajikan dalam diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Transfer Model Penyebaran HIV/AIDS dengan *ART Treatment* dan Edukasi

Berdasarkan Gambar 1 model matematika penyebaran HIV/AIDS dengan *ART Treatment* dan edukasi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - \alpha S - \mu S \\
\frac{dS_e}{dt} &= \alpha S - \varepsilon\beta S_e I - \mu S_e \\
\frac{dI}{dt} &= \beta I(S + \varepsilon S_e) - \Gamma I - \gamma I - \mu I \\
\frac{dT}{dt} &= \Gamma I - \sigma T - \mu T \\
\frac{dA}{dt} &= \gamma I + \sigma T - \delta A - \mu A
\end{aligned} \tag{2}$$

Total populasi pada penelitian ini dibagi menjadi 5 kompartemen atau

$$N(t) = S(t) + S_e(t) + I(t) + T(t) + A(t)$$

Sistem persamaan (2) pada penelitian ini menggambarkan interaksi antar subpopulasi, sehingga solusi dari sistem tersebut harus nonnegatif dan terbatas. Sistem (2) mempunyai dua titik ekuilibrium (titik kesetimbangan), yaitu titik bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Berdasarkan definisi titik kesetimbangan, maka titik kesetimbangan model penyebaran HIV/AIDS dengan *ART Treatment* dan edukasi pada sistem (2) diperoleh jika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_e}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt} = 0$$

sehingga

$$\Lambda - \beta SI - \alpha S - \mu S = 0 \tag{3}$$
$$\alpha S - \varepsilon\beta S_e I - \mu S_e = 0 \tag{4}$$
$$\beta I(S + \varepsilon S_e) - \Gamma I - \gamma I - \mu I = 0 \tag{5}$$
$$\Gamma I - \sigma T - \mu T = 0 \tag{6}$$
$$\gamma I + \sigma T - \delta A - \mu A = 0 \tag{7}$$

Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit didapat ketika tidak ada penyakit di dalam populasi. Pada titik kesetimbangan bebas penyakit, tidak ada satupun individu yang terinfeksi sehingga $I = 0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit sistem persamaan (2), adalah

$$E_1(S, S_e, I, T, A) = \left(\frac{\Lambda}{\alpha + \mu}, \frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha + \mu)}, 0,0,0\right)$$

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Dalam menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem (2) yaitu dengan mencari nilai eigen maksimum yang diperoleh dengan menggunakan metode *The Next Generation Matrix*. Metode *The Next Generation Matrix* dapat diperoleh dari model persamaan subpopulasi yang terinfeksi. Adapun langkah-langkah penentuan bilangan reproduksi dasar adalah sebagai berikut:

1. Mengambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus terinfeksi pada sistem (2). Pada sistem (2), subsistem yang terinfeksi adalah I, T, A.
2. Melakukan linearisasi terhadap subsistem terinfeksi pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Sistem linearisasi dipresentasikan dengan Matriks Jacobi, diperoleh sebagai berikut:
$$J(I,T,A)=\begin{bmatrix} \beta\dfrac{\Lambda}{\alpha+\mu}+\beta\varepsilon\dfrac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}-(\Gamma+\gamma+\mu) & 0 & 0 \\ \Gamma & -\sigma & 0 \\ \gamma & \sigma & -(\delta+\mu) \end{bmatrix}$$
3. Dekomposisi Matriks Jacobi (J) menjadi $J=F-V$ dengan F adalah matriks tranmisi dan V adalah matriks transisi, diperoleh
$$F=\begin{bmatrix} \beta\dfrac{\Lambda}{\alpha+\mu}+\beta\varepsilon\dfrac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$V=\begin{bmatrix} (\Gamma+\gamma+\mu) & 0 & 0 \\ -\Gamma & \sigma & 0 \\ -\gamma & -\sigma & (\delta+\mu) \end{bmatrix}$$

Menentukan R_0 dengan $R_0=\rho(FV^{-1})$

Diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\frac{\beta\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}+\beta\varepsilon\frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}}{(\Gamma+\gamma+\mu)}+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

Sehingga

$$\lambda^2\left(-\frac{\beta\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}+\beta\varepsilon\frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}}{(\Gamma+\gamma+\mu)}+\lambda\right)=0$$

Diperoleh nilai eigen

$\lambda_{1,2}=0$

atau

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{\beta\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}+\beta\varepsilon\frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}}{(\Gamma+\gamma+\mu)} \\ &= \frac{\beta\Lambda}{(\alpha+\mu)(\Gamma+\gamma+\mu)}+\frac{\beta\varepsilon\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)(\Gamma+\gamma+\mu)} \\ &= \frac{\beta\Lambda\mu+\beta\varepsilon\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)(\Gamma+\gamma+\mu)} \\ &= \frac{\beta\Lambda(\mu+\varepsilon\alpha)}{\mu(\alpha+\mu)(\Gamma+\gamma+\mu)}\end{aligned}$$

Karena bilangan reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral atau nilai eigen terbesar, maka

$$R_0=\frac{\beta\Lambda(\mu+\varepsilon\alpha)}{\mu(\alpha+\mu)(\Gamma+\gamma+\mu)}$$

Berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar, jika $R_0 > 1$ atau $\beta\Lambda(\mu + \varepsilon\alpha) > \mu(\alpha + \mu)(\Gamma + \gamma + \mu)$ maka terjadi endemik pada populasi, artinya individu yang terinfeksi akan bertambah banyak dan terjadi penyebaran penyakit.

Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik didapat jika $I \neq 0$ dan $I > 0$, artinya terjadi penyebaran penyakit dalam populasi. Titik kesetimbangan endemik sistem persamaan (2) diperoleh

$$E_2(S, S_e, I, T, A) = (S^*, S_e^*, I^*, T^*, A^*)$$

dengan

$$S^* = \frac{\Lambda}{\beta I^* + \alpha + \mu}$$

$$S_e^* = \frac{\alpha\Lambda}{(\beta I^* + \alpha + \mu)(\varepsilon\beta I^* + \mu)}$$

$$I^* = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1k_3}}{2k_1}$$

$$T^* = \frac{\Gamma I^*}{\sigma + \mu}$$

$$A^* = \frac{\gamma I^*(\sigma + \mu) + \sigma\Gamma I^*}{(\delta + \mu)\,(\sigma + \mu)}$$

dengan

$$k_1 = G\varepsilon\beta^2$$

$$k_2 = G\alpha\varepsilon\beta + G\mu\varepsilon\beta + G\mu\beta + \varepsilon\Lambda\beta^2$$

$$k_3 = G\alpha\mu + G\mu^2 - \mu\beta\Lambda - \beta\varepsilon\alpha\Lambda$$

$$G = (\Gamma + \gamma + \mu)$$

Teorema 2

Pada sistem (3) mempunyai titik kesetimbangan endemik, jika memenuhi

(i) Jika $k_3 < 0$, maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik

(ii) Jika $k_3 > 0$, $k_2 < 0$, dan $k_2^2 - 4k_1k_3 > 0$ maka kemungkinan terdapat dua titik kesetimbangan endemik

Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh dari linearisasi pada sistem (2). Berikut ini merupakan matriks Jacobian hasil linearisasi model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan ART treatment dan edukasi disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\alpha-\mu & 0 & -\beta\left(\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}\right) & 0 & 0 \\ \alpha & -\mu & -\varepsilon\beta\left(\frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\left(\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}\right) + \beta\varepsilon\left(\frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}\right) - \Gamma - \gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & -\sigma-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \sigma & -\delta-\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian disekitar E_1 adalah

$$(-\alpha-\mu-\lambda)(-\mu-\lambda)\left(\beta\left(\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}\right) + \varepsilon\beta\left(\frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}\right) - \Gamma - \gamma - \mu - \lambda\right)(-\sigma-\mu-\lambda)(-\delta - \mu - \lambda) = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut diperoleh lima nilai eigen yaitu

$\lambda_1 = -(\alpha + \mu)$, $\lambda_2 = -\mu$, $\lambda_3 = -(\sigma + \mu)$, $\lambda_4 = -(\delta + \mu)$, dan

$\lambda_5 = \beta\left(\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}\right) + \varepsilon\beta\left(\frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}\right) - \Gamma - \gamma - \mu$. Untuk λ_5 akan bernilai negatif jika $\beta < \frac{(\Gamma+\gamma+\mu)(\alpha\mu+\mu^2)}{\Lambda\mu+\varepsilon\alpha\Lambda}$ sehingga titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik lokal.

Teorema 3
jika $\beta < \frac{(\Gamma+\gamma+\mu)(\alpha\mu+\mu^2)}{\Lambda\mu+\varepsilon\alpha\Lambda}$, maka titik Kesetimbangan bebas penyakit $E_1(S, S_e, I, T, A) = \left(\frac{\Lambda}{\alpha+\mu}, \frac{\alpha\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)}, 0,0,0\right)$ pada sistem (2) bersifat stabil asimtotik lokal.

Simulasi Numerik
Simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan ART Treatment dan edukasi menggunakan metode euler dengan bantuan program Matlab. Simulasi ini dilakukan untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit. Selain itu juga akan dilakukan percobaan dengan memilih salah satu kasus untuk melihan kestabilan titik kesetimbangan endemik dengan membuat bilangan reproduksi dasar $(R_0) > 1$. Adapun nilai-awal dan nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

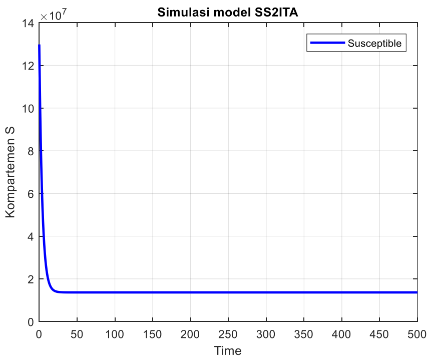
1. Diasumsikan bahwa populasi $N(t)$ adalah 229.800.000 jiwa, dengan
$$N(t) = S(t) + S_e(t) + I(t) + T(t) + A(t)$$
2. Nilai awal untuk setiap kompartemen adalah sebagai berikut (Zhai et al., 2023):
$S(0) = 129.789.089$
$S_e(0) = 1 \times 10^8$
$I(0) = 7195$
$T(0) = 0$
$A(0) = 3716$

3. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi model adalah sebagai berikut (Zhai et al., 2023):

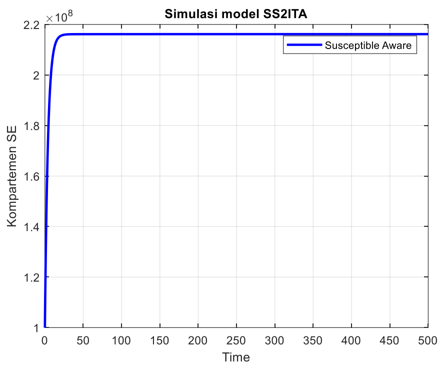
Tabel 1. Nilai Parameter

No.	Parameter	Nilai	Satuan
1.	Λ	$\frac{229.800.000}{67.39}$	$\frac{1}{Tahun}$
2.	β	$\frac{0.3465}{229.800.000}$	$\frac{1}{Tahun}$
3.	α	0.2351	$\frac{1}{Tahun}$
4.	μ	$\frac{1}{67.39}$	$\frac{1}{Tahun}$
5.	ε	0.3 (Asumsi)	$\frac{1}{Tahun}$
6.	Γ	0.00036523	$\frac{1}{Tahun}$
7.	γ	0.1882	$\frac{1}{Tahun}$
8.	σ	0.0059 (Asumsi)	$\frac{1}{Tahun}$
9.	δ	0.7012	$\frac{1}{Tahun}$

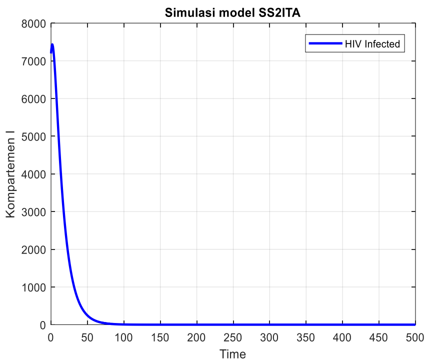
Berdasarkan nilai parameter di atas diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = 0.6013$, karena $R_0 < 1$, maka penyebaran penyakit akan menurun dan menghilang pada jangka waktu tertentu, dengan kata lain dikarenakan $I = 0$ artinya dalam jangka waktu tertentu tidak ada yang terinfeksi dalam populasi sehingga tidak ada penyebaran penyakit HIV/AIDS di dalam populasi, dan populasi bebas penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (1.3643 \times 10^7, 2.1616 \times 10^8, 0,0,0)$ Berdasarkan **teorema 1** kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal. Hasil simulasi setiap kompartemen model dengan nilai parameter dan nilai awal yang diberikan, $t = 500$ (t dalam tahun), dan $dt = 0.01$, diperoleh gambar simulasi sebagai berikut:



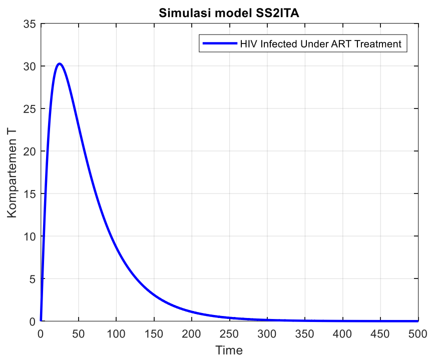
2(a)



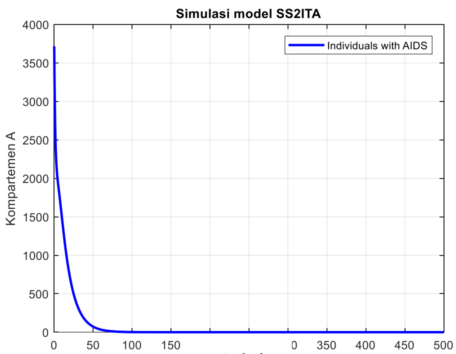
2(b)



2(c)



2(d



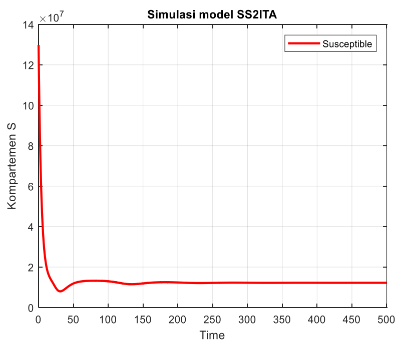
2(e)

Gambar 2. Simulasi Setiap Kompartemen pada Model Penyebaran HIV/AIDS dengan ART Treatment dan Edukasi pada Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit dengan $t = 500$ dan $dt = 0.01$

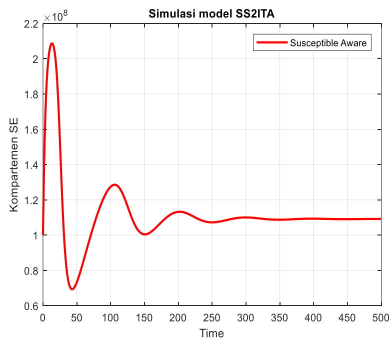
Berdasarkan Gambar 2, diperoleh informasi

1. Pada Gambar 2(a) menunjukkan bahwa populasi individu rentan yang tidak mempunyai kesadaran terhadap penyakit HIV/AIDS menurun sampai dengan $t = 48$ dan stabil menuju titik 1.3643×10^7, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang banyak individu yang masuk ke dalam komparteman individu rentan yang mulai teredukasi dan sadar terhadap bahaya penyakit HIV/AIDS.
2. Pada Gambar 2(b) menunjukkan bahwa populasi individu rentan yang teredukasi dan sadar terhadap bahaya penyakit selalu naik, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang program edukasi untuk individu rentan terhadap penyakit HIV/AIDS harus terus dijalankan karena berdampak positif. Hasil tersebut sesuai dengan simulasi dengan grafik yang selalu naik sampai dengan $t = 45$ kemudian stabil menuju titik 2.1616×10^8.
3. Pada gambar 2(c) menunjukkan individu yang terinfeksi meningkat hingga $t = 3$, kemudian menurun dan berdasarkan hasil simulai pada $t = 118$ grafik mulai stabil menuju titik 0, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang tidak ada individu yang terinfeksi HIV pada populasi.
4. Pada gambar 2(d) menunjukkan bahwa individu yang terinfeksi HIV dengan pengobatan ART treatment meningkat sampai $t = 25$, kemudian menurun dan berdasarkan hasil simulai pada $t = 204$ grafik mulai stabil menuju titik 0, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang tidak ada individu yang terinfeksi HIV dengan pengobatan ART treatment pada populasi.
5. Pada gambar 2(e) menunjukkan bahwa individu yang terinfeksi AIDS terus mengalami penurunan, dan berdasarkan hasil simulai pada $t = 103$ grafik mulai stabil menuju titik 0, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang tidak ada individu yang terinfeksi AIDS pada populasi.

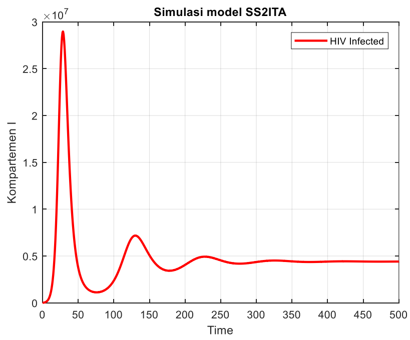
Pada penelitian ini juga akan diberikan salah satu contoh simulasi pada titik kesetimbangan endemik, artinya kompartemen individu yang terinfeksi HIV $(I \neq 0)$ atau penyakit menyebar dalam populasi. Adapun nilai awal yang digunakan pada simulasi ini sama dengan nilai awal pada simulasi di titik kesetimbangan bebas penyakit. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini nilai β diperbesar menjadi $\frac{1.5}{229.800.000}$, nilai ε diperbesar menjadi 0.4, nilai Γ diperbesar menjadi 0.3 dan nilai γ diperkecil menjadi 0.05 sehingga diperoleh $R_0 > 1$ yaitu $R_0 = 1.7910$. Hasil simulasi model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan ART Treatment dan edukasi pada titik kesetimbangan endemik adalah sebagai berikut:



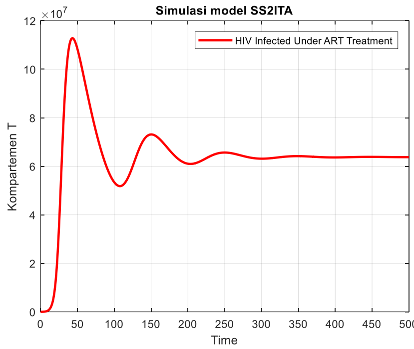
3(a)



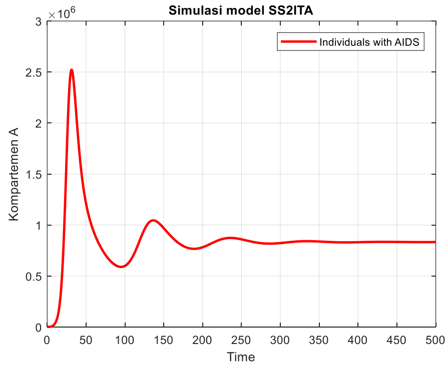
3(b)



3(c)



3(d)



3(e)

Gambar 3. Simulasi Setiap Kompartemen pada Model Penyebaran HIV/AIDS dengan ART Treatment dan Edukasi pada Titik Kesetimbangan Endemik dengan $t = 500$ dan $dt = 0.01$

Berdasarkan Gambar 3, diperoleh informasi

1. Pada Gambar 3(a) menunjukkan bahwa populasi individu rentan yang tidak mempunyai kesadaran terhadap penyakit HIV/AIDS menurun sampai dengan $t = 37$, kemudian meningkat sedikit sampai dengan $t = 100$ dan grafik mulai stabil menuju titik 1.2234×10^7, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang individu rentan yang tidak mempunyai kesadaran terhadap HIV/AIDS berkurang dan masuk ke dalam komparteman individu rentan yang mulai teredukasi dan sadar terhadap bahaya penyakit HIV/AIDS.
2. Pada Gambar 3(b) menunjukkan bahwa populasi individu rentan yang teredukasi dan sadar terhadap bahaya penyakit meningkat hingga $t = 17$, kemudian menurun hingga $t = 55$. Terjadi naik turun jumlah individu pada kompartemen S_e sampai pada $t = 379$ mulai stabil ke titik 1.0915×10^8, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang individu rentan yang teredukasi dan mempunyai kesadaran terhadap bahaya HIV/AIDS mencapai 1.0915×10^8.
3. Pada gambar 3(c) menunjukkan individu yang terinfeksi meningkat hingga $t = 35$, kemudian menurun hingga $t = 81$. Terjadi naik turun jumlah individu pada kompartemen I sampai pada $t = 405$ mulai stabil ke titik 4.4097×10^6, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang individu rentan yang terinfeksi HIV mencapai 4.4097×10^6.
4. Pada gambar 3(d) menunjukkan bahwa individu yang terinfeksi HIV dengan pengobatan ART treatment meningkat sampai $t = 49$, kemudian menurun hingga $t = 114$ Terjadi

naik turun jumlah individu pada kompartemen T sampai pada $t = 401$ mulai stabil ke titik 6.3788×10^7, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang individu yang terinfeksi HIV dengan pengobatan ART treatment mencapai 6.3788×10^7.

5. Pada gambar 3(e) menunjukkan bahwa individu yang terinfeksi AIDS meningkat sampai $t = 37,$ kemudian menurun hingga $t = 110$ Terjadi naik turun jumlah individu pada kompartemen T sampai pada $t = 421$ mulai stabil ke titik 8.3352×10^5, artinya untuk $t \to \infty$ atau dalam jangka panjang individu yang terinfeksi HIV dengan pengobatan ART treatment mencapai 8.3352×10^5.

KESIMPULAN

Berdasarkan asumsi-asumsi dan pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan ART Treatment dan edukasi diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1) dan titik kesetimbangan endemik (E_2)
2. Bilangan reproduksi dasar dari model matematika adalah
$$R_0 = \frac{\beta\Lambda(\mu + \varepsilon\alpha)}{\mu(\alpha + \mu)(\Gamma + \gamma + \mu)}$$
3. Titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ artinya penyakit akan menghilang pada populasi
4. Diberikan satu contoh kasus keadaan pada titik kesetimbangan endemik dengan $R_0 > 1$, yang artinya dalam jangka panjang penyakit akan tetap menyebar pada populasi.

DAFTAR PUSTAKA

Arias, R., Angeles, K. De, Maleki, S., & Ahangar, R. R. (2022). Mathematical Modeling of The HIV-AIDS Epidemic. *Open Access Library Journal*, *Vol. 9*, 1–15. https://doi.org/10.4236/oalib.1107972

Boyce, W. E., & Diprima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems 9 th Edition*. John Wiley & Sons Inc.

Driessche, P. Van Den, & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, *18*, 29–48.

Faisah, Toaha, S., & Kasbawati. (2018). Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV Dengan Klasifikasi Gejala Pada Penderita. *Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *15*(2), 106–118.

Finizio, N., & Ladas, G. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*. Erlangga.

Haryanto, D., Kusumastuti, N., & Prihandono, B. (2015). Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Model Pada Penyebaran HIV-AIDS. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. Dan Terapannya*, *04*(2), 101–110.

Jafaruddin, Pangaribuan, R. M., Aryanto, & Henukh, I. A. (2017). Analisis Kestabilan Model Host-Vector Transmisi HIV/AIDS Pada Pengguna Jarum Suntik. *Jurnal Matematika*, *7*(1), 1–11. https://doi.org/10.24843/jmat.2017.v07.i01.p77

Kasbawati. (2011). Analisis Numerik Model Epidemiologi SIR dengan Faktor Difusi. *JMSK Jurnal Matematika, Statistika, Dan Komputasi*, *7*(2), 98–107.

Lamusu, M. F., Mamula, D., & Muhsana, F. (2019). Analisis Kestabilan Titik Tetap Pada Model Matematika Penyebaran HIV/AIDS. *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, *7*(1), 15–24. https://doi.org/10.34312/euler.v7i1.10329

Maimunah, & Aldila, D. (2018). Mathematical Model for HIV Spreads Control Program with ART Treatment. *Journal of Physics: Conference Series*, *974*(1), 1–14.

https://doi.org/10.1088/1742-6596/974/1/012035

Ogunlaran, O. M., & Oukouomi Noutchie, S. C. (2016). Mathematical Model for an Effective Management of HIV Infection. *BioMed Research International*, *2016*, 1–6. https://doi.org/10.1155/2016/4217548

Perko, L. (2000). *Differential Equations and Dynamical System 3rd editions*. Springer.

Saltina, Achmad, N., Resmawan, & Nuha, A. R. (2022). Model Matematika Tipe SEIQR Pada Penyebaran Penyakit Difteri. *Majalah Ilmiah Matematika Dan Statistika*, *22*(1), 14–29. https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

Snyder, H. (2019). Literature Review as a Research Methodology: An Overview and Guidelines. *Journal of Business Research*, *104*(August), 333–339. https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2019.07.039

Sugiyono. (2015). *Metode Penelitian Pendidikan*. Alfabeta.

Zhai, X., Li, W., Wei, F., & Mao, X. (2023). Dynamics of an HIV/AIDS Transmission Model with Protection Awareness and Fluctuations. *Chaos, Solitons and Fractals*, *169*(November 2022), 113224. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113224