OPEN ACCESS
MES: *Journal of Mathematics Education and Science*
ISSN: 2579-6550 (online) 2528-4363 (print)
Vol. 9, No. 2, April 2024

Situs web: https://jurnal.uisu.ac.id/index.php/mesuisu
Email: jurnalmes@fkip.uisu.ac.id

DIMENSI PARTISI PADA GRAF PAYUNG

Yuli Anti Mitcselina Rumahorbo*
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Saib Suwilo
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Mardiningsih
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Putri Khairiah Nasution
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Abstrak. Dimensi metrik, dimensi partisi, dan bilangan kromatik-lokasi dari suatu graf merupakan tiga macam konsep dimensi dalam graf yang berkaitan. Untuk memperoleh cara pandang baru terhadap permasalahan penentuan dimensi metrik graf, Chartrand, Salehi, dan Zhang pada tahun 2000 memperkenalkan suatu konsep baru yang selanjutnya dikenal sebagai dimensi partisi graf. Andaikan $G(V,E)$ suatu graf terhubung dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Diberikan partisi Π dari $V(G)$ dengan k kelas komponen dalam bentuk $\Pi = \{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$. Representasi dari titik t terhadap Π didefinisikan sebagai vektor dengan k komponen dapat ditulis dalam bentuk $r(t|\Pi) = \left(d(t,L_1), d(t,L_2), \cdots, d(t,L_k)\right)$, dimana k merupakan bilangan bulat positif. Untuk suatu graf G terhubung dan suatu subhimpunan $L \subset V(G)$, partisi Π disebut partisi pembeda dari graf G jika semua representasi dari titik $t \in V(G)$ berbeda terhadap Π. Bilangan bulat positif terkecil k adalah dimensi partisi pada graf G yang dinotasikan dengan $pd(G)$. Pada penelitian ini akan ditentukan dimensi partisi pada graf payung $U_{m,n}(1)$ dan $U_{m,n}(2)$. Graf $U_{m,n}(1)$ merupakan suatu graf hasil penggabungan sebuah graf roda $W_{1,n}$ dan lintasan P_n. Graf $U_{m,n}(2)$ merupakan suatu graf hasil penggabungan sebuah graf kipas $F_{1,n}$ dan lintasan P_n.
Kata Kunci: Dimensi Partisi, Graf Payung, Graf Kipas, Graf Roda, Representasi.

Abstract. *The metric dimension, partition dimension, and location-chromatic number of a graph are three related concepts of dimension in graphs. To gain a new perspective on the problem of determining the metric dimension of a graph, Chartrand, Salehi, and Zhang in 2000 introduced a new concept which is known as graph partition dimension. Let $G(V,E)$ be a connected graph with the vertex set V and the of edges E. Given a partition Π of $V(G)$ with k component classes in the form $\Pi = \{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$. The representation of a vertex t with respect to Π defined as a vector with k components can be written in the form $r(t|\Pi) = \left(d(t,L_1), d(t,L_2), \cdots, d(t,L_k)\right)$, where k is a positive integer. For a connected graph G and a subset $L \subset V(G)$, a partition Π called a distinguishing partition of the graph G if all representations of a vertex $t \in V(G)$ are distinct with respect to Π. The smallest positive integer k is the partition dimension of the graph G denoted by $pd(G)$. In this research, the partition dimension of the umbrella graphs $U_{m,n}(1)$ and $U_{m,n}(2)$. Graph $U_{m,n}(1)$ is a graph merged from a wheel graph $W_{1,n}$ and a path P_n. Graph $U_{m,n}(2)$ is a graph merged from a fan graph $F_{1,n}$ and a path P_n.*
Keywords: *Fan Graph, Partition Dimension, Representation, Umbrella Graph, Wheel Graph.*

Sitasi: Rumahorbo, Y.A.M., Suwilo, S., Mardiningsih., Nasution, P.K. 2024. Dimensi Partisi pada Graf Payung. *MES* (*Journal of Mathematics Education and Science*), 9(2): 146-155.			
Submit: 20 Desember 2023	**Revise:** 08 Januari 2024	**Accepted:** 15 Januari 2024	**Publish:** 30 April 2024

*Corresponding Author: *yulianti.rumahorbo2001@gmail.com*

PENDAHULUAN

Teori graf adalah cabang ilmu dalam matematika diskrit yang mempelajari hubungan antara objek-objek yang disajikan dalam bentuk titik dan sisi. Konsep-konsep dari teori graf dapat digunakan untuk menganalisis dan merepresentasikan berbagai masalah kompleks menjadi struktur yang lebih sederhana dan mudah dipahami.

Dimnsi metrik, dimensi partisi, dan bilangan kromatik-lokasi dari suatu graf merupakan tiga macam konsep dimensi dalam graf yang berkaitan (Baskoro, 2023). Pada tahun 1975 konsep dimensi metrik dari suatu graf diperkenalkan oleh Slater dan pada tahun 1976 oleh Harary dan Melter secara terpisah. Slater menggunakan istilah himpunan lokasi (Slater, 1975), sedangkan Harary dan Melter memakai istilah himpunan pembeda untuk sesuatu yang sama (Harary & Melter, 1976). Untuk memperoleh cara pandang baru terhadap permasalahan penentuan dimensi metrik graf, Chartrand, Salehi, dan Zhang pada tahun 2000 memperkenalkan suatu konsep baru yang selanjutnya dikenal sebagai dimensi partisi graf (Chartrand et al., 2000). Konsep bilangan kromatik-lokasi pada graf pertama kali dikemukakan oleh Chartrand, Erwin, Henning, Slater, dan Zhang pada tahun 2002 (Chartrand et al., 2002).

Graf G yang dinotasikan dengan $G(V,E)$ didefinisikan sebagai suatu objek yang terdiri atas himpunan titik berhingga dan tak kosong V dan himpunan sisi E yang terdiri dari pasangan tak berurut $\{s,t\}$ dengan $s,t \in V$ dan $s \neq t$ (Chartrand et al., 2010). Sebuah jalan W dengan panjang n yang menghubungkan titik s dan t dalam graf G adalah suatu barisan sisi dalam bentuk $W = \{s = t_0, t_1\}, \{t_1, t_2\}, \cdots, \{t_{n-1}, t_n = t\}$. Bila $s \neq t$ maka jalan W disebut jalan terbuka. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut sebagai lintasan (West & others, 2001). Jika untuk setiap dua titik s dan t di G senantiasa terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik s dan t, maka graf G dikatakan terhubung (Hartsfield & Ringel, 2013). Jarak dari titik s ke t, yang dinotasikan dengan $d(s,t)$, merupakan panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik s dan t di G.

Andaikan suatu graf G terhubung dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Untuk suatu subhimpunan $L \subset V(G)$ dan titik $t \in V(G)$ didefinisikan jarak antara titik t dan subhimpunan L adalah $d(t,L) = min\,\{d(t,z) | z \in L\}$. Diberikan partisi Π dari $V(G)$ dengan k kelas komponen dalam bentuk $\Pi = \{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$. Representasi dari titik t terhadap Π didefinisikan sebagai vektor dengan k komponen sebagai berikut: $r(t|\Pi) = \big(d(t,L_1), d(t,L_2), \cdots, d(t,L_k)\big)$, dimana k merupakan bilangan bulat positif. Bila semua representasi dari titik $t \in V(G)$ terhadap Π berbeda, maka partisi Π disebut sebagai partisi pembeda dari G. Dimensi partisi dari graf G yang dinotasikan dengan $pd(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki partisi pembeda dengan k kelas partisi (Chartrand et al., 2000).

Teorema dalam (Chartrand et al., 2000) dapat digunakan untuk menentukan batas bawah dimensi partisi pada graf.

Teorema 1. *Andaikan G graf terhubung orde $n \geq 2$. Maka, $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G lintasan.*

Dari Teorema 1 diperoleh definisi sebagai berikut.

Definisi 2. *Andaikan $G(V,E)$ merupakan suatu graf terhubung orde $n \geq 2$. Maka, $pd(G) \geq 2$.*

Selanjutnya, penelitian tentang dimensi partisi telah banyak dilakukan. Pada awalnya, Chartrand, Salehi, dan Zhang melakukan penelitian tentang dimensi partisi pada lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{s_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{\{s_i, s_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n-1\}$, graf lingkaran C_n

dengan $V(C_n) = \{s_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{\{s_i, s_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n \cup \{s_1, s_n\}\}$, dan graf bintang $K_{1,n}$ dengan $V(K_{1,n}) = \{u, s_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(K_{1,n}) = \{\{u, s_i\}; 1 \leq i \leq n\}$ (Chartrand et al., 2000).

Selanjutnya, pada tahun 2014 Yero memperlihatkan dimensi partisi pada graf roda $W_{1,n}$ dengan $V(W_{1,n}) = \{u, s_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_{1,n}) = \left\{\{u, s_i\}; 1 \leq i \leq n \cup \{s_i, s_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n-1 \cup \{s_1, s_n\}\right\}$ dan graf kipas $F_{1,n}$ dengan $V(F_{1,n}) = \{u, s_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(F_{1,n}) = \left\{\{u, s_i\}; 1 \leq i \leq n \cup \{s_i, s_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n-1\right\}$ (Yero, 2014). Penelitian dimensi partisi pada graf lolipop $L_{m,n}$ telah dilakukan oleh Hanif, Welyyanti, dan Efendi pada tahun 2018 (Hanif et al., 2019). Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan bulat positif terkecil manakah yang merupakan dimensi partisi pada graf payung $U_{m,n}(1)$ dengan $m \geq 4$ dan $n \geq 2$ dan $U_{m,n}(2)$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.

METODE

Permasalahan penelitian ini diselesaikan dengan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut. Pada tahap awal dilakukan simulasi untuk mendapatkan pola dari dimensi partisi pada graf payung $U_{m,n}(1)$ dan $U_{m,n}(2)$. Kemudian berdasarkan pola yang diperoleh dari hasil simulasi dibentuk teori.

Batas Bawah Dimensi Partisi pada Graf Payung $U_{m,n}(1)$ dan $U_{m,n}(2)$

Batas bawah ditentukan dengan memperlihatkan bahwa graf payung $U_{m,n}(1)$ dan $U_{m,n}(2)$ bukan merupakan lintasan (dari Teorema 3). Dari Definisi 4, maka diperoleh $pd\left(U_{m,n}(1)\right) \geq 2$ dan $pd\left(U_{m,n}(2)\right) \geq 2$.

Batas Atas Dimensi Partisi pada Graf Payung $U_{m,n}(1)$ dan $U_{m,n}(2)$

Batas atas ditentukan dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Karena graf payung $U_{m,n}$ suatu graf terhubung dengan himpunan titik $V(U_{m,n})$ dan himpunan sisi $E(U_{m,n})$. Diberikan partisi Π dari $V(G)$ dengan k kelas komponen dalam bentuk $\Pi = \{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$, dimana k merupakan bilangan positif. Selanjutnya ditentukan partisi pembeda dengan kardinalitas terkecil dari graf payung $U_{m,n}$, yaitu dengan memeriksa apakah terdapat partisi pembeda jika $k = 3$. Perhatikan graf berikut.

Andaikan graf payung $U_{3,2}$ adalah suatu graf terhubung yang terdiri dari himpunan titik $V(U_{3,2}) = \{s_1, s_2, s_3, t_1, t_2\}$ dan himpunan sisi $E(U_{3,2}) = \left\{\{s_i, s_{i+1}\}; i = 1, 2 \cup \{s_i, t_1\}; i = 1, 2, 3 \cup \{t_1, t_2\}\right\}$ dan suatu subhimpunan $L \subset V(U_{3,2})$. Diberikan partisi $\Pi = \{L_1, L_2, L_3\}$ dari $V(U_{3,2})$. Partisi Π merupakan partisi dengan 3 kelas komponen. Representasi dari setiap titik pada graf $U_{3,2}$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

$$r(s_1|\Pi) = \big(d(s_1, L_1), d(s_1, L_2), d(s_1, L_3)\big),$$
$$r(s_2|\Pi) = \big(d(s_2, L_1), d(s_2, L_2), d(s_2, L_3)\big),$$
$$\vdots$$
$$r(t_2|\Pi) = \big(d(t_2, L_1), d(t_2, L_2), d(t_2, L_3)\big).$$

Bila semua representasi dari setiap titik pada graf $U_{3,2}$ berbeda terhadap Π, maka partisi Π disebut sebagai partisi pembeda dari $U_{3,2}$. Sehingga, $pd(U_{3,2}) \leq 3$.

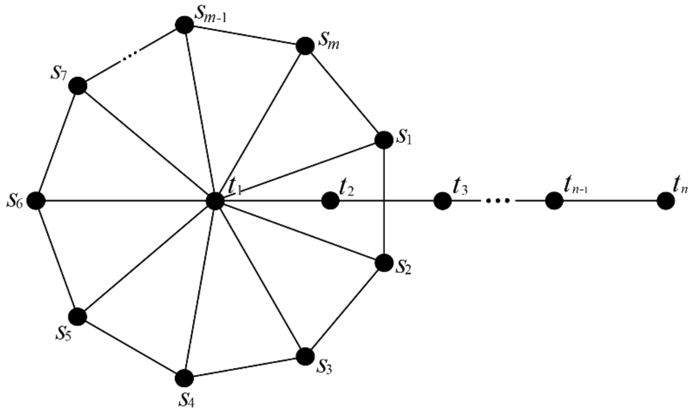
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini didiskusikan dimensi partisi pada graf payung $U_{m,n}(1)$ dengan $m \geq 4$ dan $n \geq 2$ dan graf payung $U_{m,n}(2)$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.

Dimensi Partisi pada Graf Payung $\boldsymbol{U_{m,n}(1)}$

Definisi 3. *Graf payung yang dinotasikan dengan $U_{m,n}(1)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik pusat dari sebuah graf roda $W_{1,n}$ ke salah satu titik ujung dari sebuah lintasan P_n.*

Berikut diberikan konstruksi graf payung berdasarkan Definisi 3.



Gambar 1. 1 Konstruksi Graf Payung $U_{m,n}(1)$

Graf payung $U_{m,n}(1)$ merupakan graf terhubung yang terdiri dari himpunan titik $V\left(U_{m,n}(1)\right) = \{s_i, t_j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E\left(U_{m,n}(1)\right) = \{\{s_i, s_{i+1}\}; 1 \leq i \leq m-1 \cup \{s_1, s_m\} \cup \{s_i, t_1\}; 1 \leq i \leq m \ \cup \{t_i, t_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n-1\}$.

Proposisi 4. *Andaikan $U_{4,n}(1)$ adalah graf payung dengan $m = 4$ dan $n \geq 2$ maka $pd\left(U_{4,n}(1)\right) = 3$.*

Bukti. Andaikan $U_{4,n}(1)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{4,n}(1)\right) = \{s_i, t_j; 1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq n\}$ dengan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{4,n}(1)\right) = 3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $pd\left(U_{4,n}(1)\right) \geq 3$ dan $pd\left(U_{4,n}(1)\right) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi pada graf payung $U_{4,n}(1)$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 1. Dari teorema tersebut diperoleh kontraposisinya yaitu jika $pd(G) \neq 2$, maka graf $G \neq P_n$. Karena $U_{4,n}(1) \neq P_n$, maka diperoleh $pd\left(U_{4,n}(1)\right) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd\left(U_{4,n}(1)\right) \geq 3$.

Selanjutnya, batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{4,n}(1)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Andaikan $\Pi = \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, L_3\}$ dengan $L_1 = \{s_1, s_2, t_i; 1 \leq i \leq n\}, L_2 = \{s_3\}$, dan $L_3 = \{s_4\}$, diperoleh bahwa representasi dari setiap titik pada graf $U_{4,n}(1)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{4,n}(1)\right) \leq 3$. Dari batas bawah dan batas atas tersebut, maka $pd\left(U_{4,n}(1)\right) = 3$.

Teorema 5. *Andaikan* $U_{m,n}(1)$ *adalah graf payung dengan* $m \geq 5$ *dan* $n \geq 2$ *maka* $pd\left(U_{m,n}(1)\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$.

Bukti. Andaikan $U_{m,n}(1)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{m,n}(1)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{m,n}(1)\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$, yaitu dengan memperlihatkan dua kasus.

Kasus 1. m ganjil.

Didefinisikan partisi $\Pi = \{L_1, L_2, L_3, \cdots, L_{\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\}$ dari $U_{m,n}(1)$ dengan $L_1 = \{s_1, s_2, t_i; 1 \leq i \leq n\}, L_i = \{s_{m-2}, s_{m-1}\}$, untuk $2 \leq i \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil - 1$, dan $L_{\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil} = \{s_m\}$. Karena representasi dari setiap titik pada graf $U_{m,n}(1)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{m,n}(1)\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ untuk m ganjil.

Kasus 1. m genap.

Didefinisikan partisi $\Pi = \{L_1, L_2, L_3, \cdots, L_{\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\}$ dari $U_{m,n}(1)$ dengan $L_1 = \{s_1, s_2, t_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $L_i = \{s_{m-1}, s_m\}$, untuk $2 \leq i \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$. Karena representasi dari setiap titik pada graf $U_{m,n}(1)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{m,n}(1)\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ untuk m genap.

Dari Kasus 1 dan Kasus 2 disimpulkan bahwa $pd\left(U_{m,n}(1)\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 2$.

Proposisi 6. *Andaikan* $U_{5,n}(1)$ *adalah graf payung dengan* $m = 5$ *dan* $n \geq 2$ *maka* $pd\left(U_{5,n}(1)\right) = 3$.

Bukti. Andaikan $U_{5,n}(1)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{5,n}(1)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq 5; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{5,n}(1)\right) = 3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $pd\left(U_{5,n}(1)\right) \geq 3$ dan $pd\left(U_{5,n}(1)\right) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi pada graf payung $U_{5,n}(1)$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 1. Dari teorema tersebut diperoleh kontraposisinya yaitu jika $pd(G) \neq 2$, maka graf $G \neq P_n$. Karena $U_{5,n}(1) \neq P_n$, maka diperoleh $pd\left(U_{5,n}(1)\right) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd\left(U_{5,n}(1)\right) \geq 3$.

Selanjutnya, batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{5,n}(1)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Andaikan $\Pi = \{L_1, L_2, L_3\}$ dengan $L_1 = \{s_1, s_2, t_i; 1 \leq i \leq n\}, L_2 = \{s_3, s_4\}$, dan $L_3 = \{s_5\}$, diperoleh bahwa representasi dari setiap titik pada graf $U_{5,n}(1)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{5,n}(1)\right) \leq 3$. Dari batas bawah dan batas atas tersebut, maka $pd\left(U_{5,n}(1)\right) = 3$.

Proposisi 7. *Andaikan* $U_{6,n}(1)$ *adalah graf payung dengan* $m = 6$ *dan* $n \geq 2$ *maka* $pd\left(U_{6,n}(1)\right) = 3$.

Bukti. Andaikan $U_{6,n}(1)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{6,n}(1)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{6,n}(1)\right) = 3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $pd\left(U_{6,n}(1)\right) \geq 3$ dan $pd\left(U_{6,n}(1)\right) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi pada graf payung $U_{6,n}(1)$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 1. Dari teorema tersebut diperoleh kontraposisinya yaitu jika $pd(G) \neq 2$, maka graf $G \neq P_n$. Karena $U_{6,n}(1) \neq P_n$, maka diperoleh $pd\left(U_{6,n}(1)\right) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd\left(U_{6,n}(1)\right) \geq 3$.

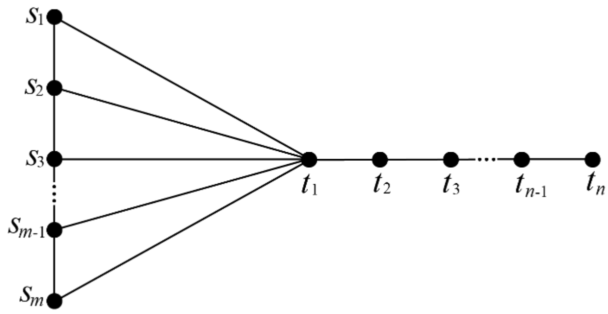
Selanjutnya, batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{6,n}(1)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Andaikan $\Pi = \{L_1, L_2, L_3\}$ dengan $L_1 = \{s_1, s_2, t_i; 1 \leq i \leq n\}, L_2 = \{s_3, s_4\}$, dan $L_3 = \{s_5, s_6\}$, diperoleh bahwa representasi dari setiap titik pada graf $U_{6,n}(1)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{6,n}(1)\right) \leq 3$. Dari batas bawah dan batas atas tersebut, maka $pd\left(U_{6,n}(1)\right) = 3$.

Dimensi Partisi pada Graf Payung $U_{m,n}(2)$

Eakawinrujee and Trakultraipruk (2023) memberikan definisi graf payung sebagai berikut.

Definisi 8. *Graf payung yang dinotasikan dengan $U_{m,n}(2)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik pusat dari sebuah graf kipas $F_{1,n}$ ke salah satu titik ujung dari sebuah lintasan P_n.*

Berikut diberikan konstruksi graf payung berdasarkan Definisi 8.



Gambar 2. Konstruksi Graf Payung $U_{m,n}(2)$

Graf payung $U_{m,n}(2)$ merupakan graf terhubung yang terdiri dari himpunan titik $V\left(U_{m,n}(2)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\right\}$ dan himpunan sisi $E\left(U_{m,n}(2)\right) = \left\{\{s_i, s_{i+1}\}; 1 \leq i \leq m-1 \cup \{s_i, t_1\}; 1 \leq i \leq m \cup \{t_i, t_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n-1\right\}$.

Proposisi 9. *Andaikan $U_{3,n}(2)$ adalah graf payung dengan $m = 3$ dan $n \geq 2$ maka $pd\left(U_{3,n}(2)\right) = 3$.*

Bukti. Andaikan $U_{3,n}(2)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{3,n}(2)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{3,n}(2)\right) = 3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $pd\left(U_{3,n}(2)\right) \geq 3$ dan $pd\left(U_{3,n}(2)\right) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi pada graf payung $U_{3,n}(2)$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 1.

Dari teorema tersebut diperoleh kontraposisinya yaitu jika $pd(G) \neq 2$, maka graf $G \neq P_n$. Karena $U_{3,n}(2) \neq P_n$, maka diperoleh $pd\left(U_{3,n}(2)\right) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd\left(U_{3,n}(2)\right) \geq 3$.

Selanjutnya, batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{3,n}(2)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Andaikan $\Pi = \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, L_3\}$ dengan $L_1 = \{s_1, t_i; 1 \leq i \leq n\}, L_2 = \{s_2\}$, dan $L_3 = \{s_3\}$, diperoleh bahwa representasi dari setiap titik pada graf $U_{3,n}(2)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{3,n}(2)\right) \leq 3$. Dari batas bawah dan batas atas tersebut, maka $pd\left(U_{3,n}(2)\right) = 3$.

Proposisi 10. *Andaikan $U_{4,n}(2)$ adalah graf payung dengan $m = 4$ dan $n \geq 2$ maka $pd\left(U_{4,n}(2)\right) = 3$.*

Bukti. Andaikan $U_{4,n}(2)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{4,n}(2)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{4,n}(2)\right) = 3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $pd\left(U_{4,n}(2)\right) \geq 3$ dan $pd\left(U_{4,n}(2)\right) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi pada graf payung $U_{4,n}(2)$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 1. Dari teorema tersebut diperoleh kontraposisinya yaitu jika $pd(G) \neq 2$, maka graf $G \neq P_n$. Karena $U_{4,n}(2) \neq P_n$, maka diperoleh $pd\left(U_{4,n}(2)\right) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd\left(U_{4,n}(2)\right) \geq 3$.

Selanjutnya, batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{4,n}(2)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Andaikan $\Pi = \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, L_3\}$ dengan $L_1 = \{s_1, t_i; 1 \leq i \leq n\}, L_2 = \{s_2, s_3\}$, dan $L_3 = \{s_4\}$, diperoleh bahwa representasi dari setiap titik pada graf $U_{4,n}(2)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{4,n}(2)\right) \leq 3$. Dari batas bawah dan batas atas tersebut, maka $pd\left(U_{4,n}(2)\right) = 3$.

Proposisi 11. *Andaikan $U_{5,n}(2)$ adalah graf payung dengan $m = 5$ dan $n \geq 2$ maka $pd\left(U_{5,n}(2)\right) = 3$.*

Bukti. Andaikan $U_{5,n}(2)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{5,n}(2)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq 5; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{5,n}(2)\right) = 3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $pd\left(U_{5,n}(2)\right) \geq 3$ dan $pd\left(U_{5,n}(2)\right) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi pada graf payung $U_{5,n}(2)$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 1. Dari teorema tersebut diperoleh kontraposisinya yaitu jika $pd(G) \neq 2$, maka graf $G \neq P_n$. Karena $U_{5,n}(2) \neq P_n$, maka diperoleh $pd\left(U_{5,n}(2)\right) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd\left(U_{5,n}(2)\right) \geq 3$.

Selanjutnya, batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{5,n}(2)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Andaikan $\Pi = \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, L_3\}$ dengan $L_1 = \left\{s_{1,} s_5\right\}, L_2 = \{s_2,\ t_i; 2 \leq i \leq n\}$, dan $L_3 = \{s_3, s_4, t_1\}$, diperoleh bahwa representasi dari setiap titik pada graf $U_{5,n}(2)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{5,n}(2)\right) \leq 3$. Dari batas bawah dan batas atas tersebut, maka $pd\left(U_{5,n}(2)\right) = 3$.

Proposisi 12. *Andaikan* $U_{6,n}(2)$ *adalah graf payung dengan* $m = 6$ *dan* $n \geq 2$ *maka* $pd\left(U_{6,n}(2)\right) = 3$.

Bukti. Andaikan $U_{6,n}(2)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{6,n}(2)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{6,n}(2)\right) = 3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $pd\left(U_{6,n}(2)\right) \geq 3$ dan $pd\left(U_{6,n}(2)\right) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi pada graf payung $U_{6,n}(2)$ dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema 1. Dari teorema tersebut diperoleh kontraposisinya yaitu jika $pd(G) \neq 2$, maka graf $G \neq P_n$. Karena $U_{6,n}(2) \neq P_n$, maka diperoleh $pd\left(U_{6,n}(2)\right) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd\left(U_{6,n}(2)\right) \geq 3$.

Selanjutnya, batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{6,n}(2)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π. Andaikan $\Pi = \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, L_3\}$ dengan $L_1 = \left\{s_{1,}\ s_6\right\}, L_2 = \{s_2,\ t_i; 2 \leq i \leq n\}$, dan $L_3 = \{s_3, s_4, s_5, t_1\}$, diperoleh bahwa representasi dari setiap titik pada graf $U_{6,n}(2)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{6,n}(2)\right) \leq 3$. Dari batas bawah dan batas atas tersebut, maka $pd\left(U_{6,n}(2)\right) = 3$.

Teorema 13. *Andaikan* $U_{m,n}(2)$ *adalah graf payung dengan* $m \geq 7$ *dan* $n \geq 2$ *maka* $pd\left(U_{m,n}(2)\right) \leq \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil$.

Bukti. Andaikan $U_{m,n}(2)$ adalah graf payung dengan himpunan titik $V\left(U_{m,n}(2)\right) = \left\{s_i, t_j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\right\}$ dengan $m \geq 7$ dan $n \geq 2$. Akan ditunjukkan $pd\left(U_{m,n}(2)\right) \leq \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil$, yaitu dengan memperlihatkan dua kasus.

Kasus 1. m ganjil.

Didefinisikan partisi $\Pi = \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, L_3, \cdots, L_{\left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil}\}$ dari $U_{m,n}(2)$ dengan $L_1 = \{s_1, s_2, t_1\}, L_i = \{s_{m-2}, s_{m-1}\}$, untuk $2 \leq i \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil - 1$, $L_{\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil} = \{s_m\}$, dan $L_{\left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil} = \{t_i; 2 \leq i \leq n\}$. Karena representasi dari setiap titik pada graf $U_{m,n}(2)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{m,n}(2)\right) \leq \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil$ untuk m ganjil.

Kasus 1. m genap.

Didefinisikan partisi $\Pi = \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, L_3, \cdots, L_{\left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil}\}$ dari $U_{m,n}(2)$ dengan $L_1 = \{s_1, s_2,\ t_1\}$, $L_i = \{s_{m-2}, s_{m-1}\}$, untuk $2 \leq i \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil - 1$, $L_{\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil} = \{s_m\}$, dan $L_{\left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil} = \{t_i; 2 \leq i \leq n\}$. Karena representasi dari setiap titik pada graf $U_{m,n}(2)$ terhadap Π berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi, $pd\left(U_{m,n}(2)\right) \leq \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil$ untuk m genap.

Dari Kasus 1 dan Kasus 2 disimpulkan bahwa $pd\left(U_{m,n}(2)\right) \leq \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil$ dengan $m \geq 7$ dan $n \geq 2$.

KESIMPULAN

Pada penelitian ini dikaji dimensi partisi pada graf payung $U_{m,n}(1)$ dan $U_{m,n}(2)$. Graf payung $U_{m,n}(1)$ merupakan suatu graf hasil penggabungan sebuah graf roda $W_{1,n}$ dan sebuah lintasan P_n. Graf payung $U_{m,n}(2)$ merupakan suatu graf hasil penggabungan sebuah graf kipas $F_{1,n}$ dan sebuah lintasan P_n. Hasil-hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Untuk graf payung $U_{m,n}(1)$ diperoleh:

a. $pd\left(U_{4,n}(1)\right) = 3$,
b. $pd\left(U_{5,n}(1)\right) = 3$,
c. $pd\left(U_{6,n}(1)\right) = 3$, dan
d. $pd\left(U_{m,n}(1)\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ untuk $m \geq 5$ dan $n \geq 2$.

Untuk graf payung $U_{m,n}(2)$ diperoleh:

a. $pd\left(U_{3,n}(2)\right) = 3$,
b. $pd\left(U_{4,n}(2)\right) = 3$,
c. $pd\left(U_{5,n}(2)\right) = 3$,
d. $pd\left(U_{6,n}(2)\right) = 3$, dan
e. $pd\left(U_{m,n}(2)\right) \leq \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil$ untuk $m \geq 7$ dan $n \geq 2$.

Pada penelitian ini diperoleh batas atas dimensi partisi pada graf payung $U_{m,n}(1)$ dan $U_{m,n}(2)$, yaitu:

$$pd\left(U_{m,n}(1)\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \text{ untuk } m \geq 5, n \geq 2 \text{ dan}$$
$$pd\left(U_{m,n}(2)\right) \leq \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil \text{ untuk } m \geq 7, n \geq 2.$$

Pada tahap selanjutnya penelitian dilanjutkan dengan fokus menentukan batas bawah berikut.

$$pd\left(U_{m,n}(1)\right) = \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \text{ untuk } m \geq 5 \text{ dan}$$
$$pd\left(U_{m,n}(2)\right) = \left\lceil\frac{m+2}{2}\right\rceil \text{ untuk } m \geq 7.$$

DAFTAR PUSTAKA

Baskoro, E. (2023). *Dimensi dalam Graf*. ITB Press. https://www.itbpress.id/buku-gratis/

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*, *36*(89), 101.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). *Graphs & digraphs* (Vol. 39). CRC press. https://books.google.co.id/books?hl=en&lr=&id=K6-FvXRlKsQC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Graphs+%26+digraphs&ots=XC4dmje77I&sig=i4EqMHv5zULAx72GDNNsKxlJTi0&redir_esc=y#v=onepage&q=Graphs%20%26%20digraphs&f=false

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000). The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae*, *59*(1), 45–54.

Eakawinrujee, P., & Trakultraipruk, N. (2023). γ-Paired dominating graphs of lollipop, umbrella and coconut graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*, *11*(1), 65–79. https://www.researchgate.net/profile/Nantapath-Trakultraipruk/publication/369915486_g-Paired_dominating_graphs_of_lollipop_umbrella_and_coconut_graphs/links/6434d0b3609c170a130b4e75/g-Paired-dominating-graphs-of-lollipop-umbrella-and-coconut-graphs.pdf

Hanif, M. F., Welyyanti, D., & Efendi, E. (2019). Dimensi Partisi dari Graf Lolipop dan Graf Jahangir Diperumum. *Jurnal Matematika UNAND*, *7*(3), 104–109. http://jmua.fmipa.unand.ac.id/index.php/jmua/article/view/377

Harary, F., & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars Comb.*, *2*, 191–195.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (2013). *Pearls in graph theory: a comprehensive introduction*. Courier Corporation. https://books.google.co.id/books?hl=en&lr=&id=VMjDAgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Pearls+in+graph+theory:+a+comprehensive+introduction&ots=AGHxtgGeG_&sig=4SM7n7BjxI5eLuwempqkQehfEK8&redir_esc=y#v=onepage&q=Pearls%20in%20graph%20theory%3A%20a%20comprehensive%20introduction&f=false

Slater, P. J. (1975). Leaves of trees. *Congr Numerantium*, *14*, 549–559.

West, D. B., & others. (2001). *Introduction to graph theory* (Vol. 2). Prentice hall Upper Saddle River. https://www.academia.edu/download/6479067/igtpref.ps

Yero, I. G. (2014). On the Strong Partition Dimension of Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, P3–14. https://arxiv.org/abs/1312.1987

v