OPEN ACCESS
MES: *Journal of Mathematics Education and Science*
ISSN: 2579-6550 (online) 2528-4363 (print)
Vol. 10, No. 1, Oktober 2024

Situs web: https://jurnal.uisu.ac.id/index.php/mesuisu
Email: jurnalmes@fkip.uisu.ac.id

REGULARISASI REGRESI LINIER BERGANDA PADA DATA BERDIMENSI TINGGI UNTUK MENGATASI EFEK MULTIKOLINEARITAS

Muhammat Rayyan Nasution*
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Sutarman
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Open Darnius
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Elly Rosmaini
Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Abstrak. *Penelitian ini membahas model regresi linier berganda yang diberikan regularisasi dalam kasus data berdimensi tinggi ($p \gg n$), bertujuan untuk mengatasi efek multikolinearitas yang terdiri dari efek singularitas dan kualitas model yang buruk. Dalam penelitian ini mengembangkan model regresi linier berganda dengan menambahkan parameter penalti pada fungsi tujuan. Adapun data yang digunakan adalah data primer yang dibangkitkan dengan bahasa pemrograman python dengan tiga skenario sesuai dari penelitian sebelumnya. Metode yang digunakan yaitu Ordinary Least Squared (OLS), Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO) dan Ridge dalam mengestimasi parameter model regresi. Mean Squared Error (MSE) digunakan sebagai metrik evaluasi kinerja model yang dibangun. Dari hasil simulasi yang dilakukan, diperoleh bahwa metode LASSO memberikan kualitas model terbaik dengan memberikan nilai MSE terendah dibandingkan model lainnya.*
Kata Kunci: *Data berdimensi tinggi, LASSO, Multikolinearitas, Regresi linier berganda, Regularisasi, Ridge*

Abstract. *This research discusses a regularized multiple linear regression model in the case of high-dimensional data ($p \gg n$), aiming to overcome the effects of multicollinearity consisting of singularity effects and poor model quality. In this study, multiple linear regression models were developed by adding penalty parameters to the objective function. The data used is primary data generated with python programming language with three scenarios according to previous research. The methods used are Ordinary Least Squared (OLS), Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO) and Ridge in estimating regression model parameters. Mean Squared Error (MSE) is used as an evaluation metric of the performance of the model built. From the simulation results, it is found that the LASSO method provides the best model quality by providing the lowest MSE value compared to other models.*
Keywords: *High-Dimensional data, LASSO, Multicolinearity, Multiple linier regression, regularization, Ridge*

Sitasi: Nasution, M.R., Sutarman, Darnius, O., Rosmaini, E. 2024. Regularisasi Regresi Linier Berganda Pada Data Berdimensi Tinggi Untuk Mengatasi Efek Multikolinearitas. *MES* (*Journal of Mathematics Education and Science*), 10(1): 43-51.

Submit:	**Revise:**	**Accepted:**	**Publish:**
18 Juni 2024	12 Juli 2024	14 Juli 2024	10 Oktober 2024

*Corresponding Author: *mrayyannasution@gmail.com*

PENDAHULUAN

Operasi Riset (Research Operation) adalah cabang dari ilmu matematika terapan yang berfokus pada optimisasi matematika. Terdapat dua jenis model optimisasi, yaitu model linear dan non-linear. Model non-linear melibatkan variabel keputusan dalam fungsi tujuan yang berbentuk kuadrat atau perkalian antara dua variabel keputusan (Hiller, Frederick S dan Lieberman, 2001). Sementara itu, model program linear adalah salah satu metode dalam riset operasi yang digunakan untuk menyelesaikan masalah dengan cara memaksimalkan atau minimalkan fungsi tujuan yang memiliki kendala-kendala berbentuk linear (Rao, 2019).

Optimisasi linear adalah cabang penting dari matematika yang berfokus pada menemukan nilai maksimum atau minimum dari fungsi linear dengan sejumlah kendala. Namun, dalam beberapa situasi, kendala yang dihadapi dapat bersifat non-linear, yang menambah kompleksitas masalah. Meskipun banyak kasus optimisasi linear dapat diselesaikan dengan cepat dan efisien menggunakan metode klasik seperti metode simplex, kendala non-linear sering kali tidak memiliki solusi analitis yang sederhana, sehingga menyulitkan penemuan solusi optimal dengan metode klasik yang biasanya efektif untuk kendala linear. Algoritma yang biasa digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi linear, seperti metode simplex, tidak dapat diterapkan pada masalah non-linear. Dalam situasi ini, diperlukan pendekatan yang mempertimbangkan sifat non-linear dari masalah untuk mencapai solusi optimal.

Salah satu pendekatan untuk mengatasi masalah optimisasi linear dengan kendala non-linear adalah metode penalti. Metode penalti adalah pendekatan efektif untuk menangani masalah optimisasi dengan kendala, di mana kendala tersebut diterapkan sebagai "penalti" dalam fungsi objektif untuk memastikan solusi yang dihasilkan memenuhi batasan yang ditetapkan. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linear dan nonlinear dengan membangun fungsi yang bergantung pada parameter penaltinya (Sitanggang, R. P dan Sinaga, L. P, 2023). Prinsip dasar dari fungsi penalti adalah mengubah masalah yang dibatasi (constrained) menjadi masalah yang tidak dibatasi (unconstrained) dengan menambahkan parameter penalti ke dalam fungsi objektif. Metode ini telah diterapkan di berbagai bidang, termasuk ilmu ekonomi, dan manajemen rantai pasokan. Di bidang ilmu ekonomi, penalti digunakan dalam pengaturan mekanisme insentif dan pemodelan perilaku agen ekonomi untuk mendorong kepatuhan terhadap aturan atau kebijakan tertentu. Sementara dalam manajemen rantai pasokan, penggunaan penalti dapat mencegah keterlambatan pengiriman atau memastikan kepatuhan terhadap standar kualitas tertentu, sehingga berperan penting dalam menjaga efisiensi dan keberlanjutan operasional. Hal ini membuktikan bahwa metode penalti adalah alat yang efektif untuk menangani masalah kompleks dan mengoptimalkan hasil dalam berbagai konteks profesional dan akademis.

Penelitian ini bertujuan untuk melakukan kajian terhadap metode penalti yang digunakan dalam optimisasi linear. Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk mengidentifikasi kelebihan dan kekurangan masing-masing metode penalti, serta untuk menentukan situasi atau konteks spesifik di mana masing-masing metode paling efektif digunakan. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan tentang penggunaan dari metode penalti dalam menyelesaikan masalah optimisasi berkendala. Dalam penelitian ini, fokus utama adalah perbandingan kinerja metode penalti dalam menyelesaikan masalah optimisasi linear dengan kendala non-linear. Diharapkan bahwa hasil dari penelitian ini dapat memberikan kontribusi yang signifikan bagi pengembangan dan pemahaman lebih lanjut tentang metode penalti pada optimisasi linear dengan kendala non-linear.

METODE

Penelitian ini merupakan jenis penelitian/riset kepustakaan (library research). Penelitian kepustakaan, atau yang sering disebut sebagai studi literatur, adalah metode penelitian yang mengandalkan penelaahan dan analisis terhadap berbagai literatur yang relevan dengan topik yang dibahas.

Berikut adalah prosedur yang akan dilakukan dalam penelitian ini:

1. Mengidentifikasi bentuk model optimisasi dengan fungsi tujuan berbentuk fungsi linear dan fungsi kendala berupa fungsi non-linear yang dikenal sebagai Nonlinear Programming, yang mana bentuk dari formulasi masalahnya adalah:
   Minimalkan atau Maksimalkan $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
   dengan kendala $h_i(x) = 0, \quad i = 1,2, \dots, l$
   $g_j(x) \leq 0, \quad j = 1,2, \dots, m$
   $x \in X$
   dimana $h_i(x)$ dan $g_j(x)$ adalah fungsi kendala kesamaan dan ketaksamaan dan X adalah himpunan ruang solusi yang memungkinkan.
2. Menentukan metode yang umum digunakan dan akan dibandingkan dalam penelitian ini yaitu metode penalti dan metode barrier.
   Metode Penalti:
   $$\text{Minimumkan } f(x) + cP(x),$$
   dimana c adalah konstanta positif dan P adalah fungsi pada E^n yang memenuhi:
   i. P adalah kontinu
   ii. $P(x) \geq 0$ untuk semua $x \in E^n$
   iii. $P(x) = 0$ jika dan hanya jika $x \in S$
   Misalkan S didefinisikan oleh sejumlah batasan atau kendala ketidaksamaan:
   $S = \{x: g_i(x) \leq 0, \ i = 1,2, \dots, p\}$.
   Fungsi penalti sangat berguna dalam hal ini, yang mana berbentuk:
   Misalkan S didefinisikan oleh sejumlah batasan atau kendala ketidaksamaan:
   $$S = \{x: g_i(x) \leq 0, \ i = 1,2, \dots, p\}.$$
   Fungsi penalti sangat berguna dalam hal ini, yang mana berbentuk:
   $$P(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(\max[0, g_i(x)])^2$$
   Konvergensi Metode Penalti. Mempertimbangkan masalah optimisasi berkendala
   $$\begin{aligned} &\text{Minimumkan } f(x) \\ &h_i(x) = 0, \quad i = 1,2, \dots l \\ &g_j(x) \leq 0, \quad j = 1,2, \dots, m \\ &x \in X \end{aligned}$$
   Teorema. Dimana f, $g_1,\dots,g_m$, $h_1,\dots$, h_l adalah fungsi kontinu di R^n dan X bukan himpunan kosong di R^n. Misalkan masalah tersebut memiliki solusi optimal yang layak x^* dan misal P fungsi kontinu. Selanjutnya anggaplah bahwa untuk setiap c_k terdapat sebuah solusi $x^k \in X$ untuk masalah minimum $f(x) + c_kP(x)$ tunduk pada $x \in X$ dan $\{x^k\}$ terkandung dalam sebuah himpunan bagian yang kompak X. Maka limit $\bar{x}$ dari setiap konvergen selanjutnya dari $\{x^k\}$ adalah sebuah solusi optimal untuk maslah asli dan $c_kP(x^k) \to 0$, $c_k \to \infty$.

   Algoritma Metode Penalti

   Biasanya untuk menyelesaikan sebuah rangkaian masalah dengan nilai c yang meningkat secara berurutan, yaitu untuk $0 < c_k < c_{k+1}$; titik optimal x^k untuk fungsi

tujuan yang dikenakan penalti $f_{c_k}(x)$, submasalah pada iterasi ke-k, menjadi titik awal untuk masalah berikutnya, dimana $k = 1,2, \ldots$. Untuk mendapatkan nilai x^k yang optimum, diasumsikan bahwa fungsi yang dipenalti memiliki solusi untuk semua c_k.
Algoritma
Langkah 1: Dimulai dari solusi yang tidak layak/tidak mungkin x_1 dan c_1 yang sesuai. Tetapkan $k = 1$.
Langkah 2: Temukan solusi optimal x_k^* yang meminimalkan

$$f(x) + c_k \sum_{i=1}^{m} \left[max\{0, g_j(x)\}\right]^{\varepsilon}$$

Langkah 3: Uji apakah x_k^* memenuhi semua batasan-batasan, yaitu sebuah titik yang layak. Jika iya, hentikan prosedur. Jika tidak, dilanjutkan ke langkah 4.
Langkah 4: pilih nilai berikutnya dari parameter penalti c_k yang memenuhi $c_{k+1} > c_k$ yaitu $c_{k+1=a\ \ k}$ dimana $a > 1$ dan lanjutkan ke langkah 2. (Kemal, 2017).

Metode Barrier

Metode *barrier* bekerja dengan membuat penghalang pada batas wilayah atau area layak yang mencegah prosedur pencarian meninggalkan area tersebut dengan kata lain, proses pencarian akan berlangsung di area yang layak. Fungsi *barrier* adalah sebuah fungsi B yang didefinisikan pada interior S sehingga:

i. B adalah kontinu
ii. $B(x) \geq 0$
iii. $B(x) \to \infty$ saat x mendekati batas S.

Misalkan g_i, $i = 1,2, \ldots, p$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada E^n.

$$S = \{x: g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1,2, \ldots, p\}$$

adalah *robust* dan misalkan interior dari S adalah himpunan dari x dimana $g_i(x) \leq 0$, $i = 1,2, \ldots, p$. Maka fungsinya

i. Fungsi Invers

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{g_i(x)}$$

ii. Fungsi Logaritma

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{p} log[-g_i(x)]$$

Konvergensi Metode Barrier

Mempertimbangkan masalah optimisasi berkendala

$$\begin{aligned} &\text{Minimum } f(x) \\ &\text{subject to } g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1,2, \ldots, m \\ &x \in R^n \end{aligned}$$

Teorema. Misalkan $f(x)$, $g(x)$, dan $B(x)$ adalah fungsi kontinu. Misalkan $\{x^k\}$ untuk $k = 1,2, \ldots$, adalah sebuah urutan solusi dari $f_{c_k}(x)$. Misalkan ada sebuah solusi optimal x^* yang mana $\eta \cap \{x|g(x) < 0\} \neq \emptyset$, dimana η adalah sebuah ketetanggan dari x^*. Maka setiap titik batas $\bar{x}$ dari $\{x^k\}$ menyelesaikan masalah tersebut dengan $c_k B(x) \to 0$, $c_k \to 0$.

Algoritma Metode Barrier

Langkah 1: Dimulai dengan sebuah titik awal yang layak x_1, sedemikian sehingga $g_j(x_1) < 0,\ \forall j$. Untuk beberapa $c_j^1 > 0,\ \forall j$ rumuskan masalah tanpa kendala dan temukan x_2 minimum dengan menggunakan x_1 sebagai titik optimal. Tetapkan $k = 1$.

Langkah 2: pilih $c_j^{k+1} < c_j^k$ $(\forall j)$ dimana $c_j^{k+1} = bc_j^k, b < 1$, selesaikan masalah tanpa kendala dengan menggunakan x_{k+1} sebagai tebakan optimal dengan menggunakan metode optimasi tanpa kendala. Tetapkan $k = 1$.

Langkah 3: Ulangi proses tersebut sehingga diperoleh deret menurun yang monoton $\left\{c_j^k\right\}$ diperoleh.(Kemal, 2017).

3. Menentukan model masalah optimisasi linear dengan kendala non-linear dengan menggunakan metode penalti dan metode barrier.
4. Menganalisis keoptimalan model optimisasi linear untuk melihat solusi yang optimal dengan menggunakan metode penalti dan metode barrier.
5. Menyelesaikan contoh kasus optimisasi linear dengan kendala non-linear dengan menggunakan metode penalti dan metode barrier.
6. Mengevaluasi kinerja masing-masing metode.
7. Membandingkan kinerja keseluruhan masing-masing metode.

Menarik kesimpulan hasil analisis dari kasus optimisasi linear dengan kendala non-linear menggunakan metode penalti dan metode barrier.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Contoh sederhana penggunaan fungsi penalti

$$\begin{aligned}&\text{Minimumkan } f(x) = x\\ &\text{Subject to } g(x) = 10 - x \le 0\\ &x \in R\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa peminimalisir $x^* = 10$

Solusi. definisikan $P(x) = \frac{1}{2}\left[max\left\{0, g_j(x)\right\}\right]^2$ maka $P(x) = 0$, untuk $x \ge 10$ atau $P(x) = (10 - x)^2$, untuk $x < 10$.

Jika $P(x) = 0$ maka solusi optimal untuk meminimalkan $f_c(x) = f(x) + cP(x)$ adalah $x^* = -\infty$ dan ini tidak mungkin. Jadi,

$$f_c(x) = x + \frac{1}{2}c(10 - x)^2$$

Karena fungsi ini berbentuk kuadrat, dengan menggunakan turunan pertama didapat,

$$f_c'(x) = 1 - c(10 - x)$$

Cari nilai x dari turunannya

$$\begin{aligned}1 - c(10 - x) &= 0\\ 1 &= c(10 - x)\\ \frac{1}{c} &= 10 - x\end{aligned}$$

Maka kita peroleh $x = 10 - \frac{1}{c}$ yang konvergen ke $x^* = 10$ dan $c \to \infty$.

Untuk lebih memahami pemakaian metode penalti akan digunakan contoh pada masalah optimisasi linear dengan kendala non-linear berikut ini:

$$\begin{aligned}&\textit{Minimumkan } f(x) = x_1 + 2x_2\\ &\textit{subject to } g(x) = 1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \le 0\end{aligned}$$

Solusi. Definisikan fungsi penalti $P(x) = \frac{1}{2}[max\{g(x), 0\}]^2$. Dengan demikian,

$$P(x) = 0, \text{ untuk } g(x) \le 0 \text{ dan } P(x) = (1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2, \text{ untuk } g(x) \ge 0$$

Maka bentuk dari masalah tanpa kendalanya adalah:

$$\text{Minimum } f_{c_k}(x) = x_1 + 2x_2 + c_k P(x)$$

Jika $P(x) = 0$, maka solusi optimal untuk minimum $f_{c_k}(x) = x_1 + 2x_2 + c_k P(x)$ ada di $x^* = (0,0)$ dan ini tidak mungkin. Jadi

$$f_{c_k}(x) = x_1 + 2x_2 + c_k \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$$

Selanjutnya dengan menggunakan syarat kondisi yang diperlukan untuk optimalitas yaitu $(\nabla f_{c_k}(x) = 0)$ sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial f_{c_k}}{\partial x_1} = 1 - c_k \frac{1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = 0$$
$$\frac{\partial f_{c_k}}{\partial x_2} = 2 - c_k \frac{1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}} = 0$$

Ini menyiratkan bahwa

$$\frac{1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = \frac{1}{c_k}$$
$$\frac{1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}} = \frac{2}{c_k}$$

Karena $\nabla f_{c_k}(x) = 0$ dan jika $\nabla f_{c_k}(x) = 0$ diperlukan syarat $x_1 = 2x_2$. Dengan mensubtitusikan pada persamaan ini, diperoleh

$$x_1 = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{c_k}}\right)^2 \text{ dan } x_2 = \frac{1}{\left(\sqrt{2} + 1 + \frac{4}{c_k}\right)^2}$$

Dimulai dengan $c_1 = 0.1$ maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 1. Iterasi Metode Penalti

k	c_k	x_1^*	x_2^*	$g(x_k)$	$P(x_k)$	$c_k P(x_k)$	$f(x_k)$	$f_{c_k}(x_k)$
1	0.1	0.00212	0.00055	0.93036	0.34523	0.034523	0.00322	0.03774
2	1	0.07276	0.02431	0.57434	0.16493	0.16493	0.12138	0.28631
3	10	0.27495	0.12627	0.12031	0.00724	0.0724	0.52749	0.59989
4	100	0.33524	0.16603	0.01353	0.000091	0.00915	0.6673	0.67645
5	1000	0.34234	0.17100	0.00138	0.00000095	0.00095	0.68434	0.68529
6	10000	0.34306	0.17152	0.000137	0.0000000094	0.000094	0.68610	0.68620
7	100000	0.34315	0.17157	0.0000084	0.000000000035	0.0000035	0.68628	0.686284

Dengan demikian solusi optimal adalah $x^* = (0.34315\,, 0.17157)$, dengan nilai optimal $f(x^*) = 0.6863$. Dari tabel 1 dapat dilihat bahwa pencarian solusi x^* pada metode penalti terjadi diluar daerah yang tidak layak menuju daerah yang layak hingga mencapai solusi optimal. Selain itu, jika fungsi $f(x) + c_k \frac{1}{2}(g(x))^2$ diminimumkan untuk barisan nilai c yang meningkat, nilai minimum tanpa kendala x_k^* konvergen ke solusi optimal dari masalah berkendala dengan $c \to \infty$. Metode penalti mudah diimplementasikan dan dipahami karena hanya melibatkan penambahan fungsi penalti ke dalam fungsi tujuan. Metode ini dapat digunakan untuk berbagai jenis masalah optimisasi, baik yang memiliki kendala kesamaan maupun ketaksamaan. Namun, pemilihan parameter penalti yang tepat sangat penting. Parameter penalti yang terlalu besar dapat memperlambat konvergensi dan tidak selalu menjamin solusi optimal jika tidak dipilih dengan benar.

Penggunaan Metode Barrier

Contoh sederhana penggunaan fungsi *barrier*

$$\text{Minimumkan } f(x) = x$$
$$\text{subject to } g(x) = 10 - x \leq 0$$

Solusi. diselesaikan dengan menggunakan fungsi invers sehingga fungsi *barrier*nya yaitu,

$$B(x) = \frac{-1}{10 - x}$$

dengan $x \geq 10$ sebagai interval yang layak untuk masalah berkendala yang diberikan. Jadi fungsinya dapat ditulis menjadi,

$$f_c(x) = f(x) + cB(x)$$
$$x - \frac{c}{(10 - x)} = 0$$
$$x = \frac{c}{(10 - x)}$$
$$-x^2 + 10x = c$$
$$x^2 - 10x + c = 0$$

Selanjutnya persamaan kuadrat tersebut diselesaikan untuk memperoleh solusi optimum. Dengan menggunakan rumus $\left[\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$, dalam persamaan tersebut $a = 1$, $b = -10$ dan c adalah konstanta yang tidak diketahui. Maka diperoleh:

$$x^* = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4c}}{2}$$

Nilai negatif membawa pada ketidakmungkinan, sehingga solusi optimumnya adalah

$$x^* = \frac{10 + \sqrt{100 - 4c}}{2} \; dan \; c \to 0, \;\; x^* \to 10$$

Untuk lebih memahami pemakaian metode penalti akan digunakan contoh pada masalah optimisasi linear dengan kendala non-linear berikut ini:

Minimumkan $f(x) = x_1 + 2x_2$
subject to $g(x) = 1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leq 0$

Solusi definisikan fungsi barrier, untuk masalah ini digunakan fungsi logaritma,

$$B(x) = -log[-g(x)] = -log\left[\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 1\right]$$

Bentuk masalah tanpa kendalanya adalah:

Minimum $f_{c_k}(x) = x_1 + 2x_2 - c_k log[\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 1]$

Selanjutnya dengan menggunakan syarat kondisi yang diperlukan untuk optimalitas yaitu $(\nabla f_{c_k}(x) = 0)$ sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial f_{c_k}}{\partial x_1} = 1 - \frac{c_k}{2\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 1)} = 0$$
$$\frac{\partial f_{c_k}}{\partial x_2} = 2 - \frac{c_k}{2\sqrt{x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 1)} = 0$$

Karena gradien $\nabla f_{c_k}(x) = 0$ dan jika $\nabla f_{c_k}(x) = 0$ diperlukan syarat $x_1 = 2x_2$. Kita subtitusikan pada persamaan ini, dengan demikian diperoleh:

$$x_1 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4(6 + 4\sqrt{2})({c_k}^2)}}{2(6 + 4\sqrt{2})}$$

dan

$$x_2 = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 4(48 + 32\sqrt{2})(c_k{}^2)}}{2(48 + 32\sqrt{2})}$$

Karena tanda negatif mengarah pada ketidakmungkinan, maka:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 + 4(6 + 4\sqrt{2})(c_k{}^2)}}{2(6 + 4\sqrt{2})}$$

dan

$$x_2 = \frac{16 + \sqrt{256 + 4(48 + 32\sqrt{2})(c_k{}^2)}}{2(48 + 32\sqrt{2})}$$

Dimulai dengan $c_1 = 10$ maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 2. Iterasi Metode Barrier

k	c_k	x_1^*	x_2^*	$g(x_k)$	$B(x_k)$	$c_k B(x_k)$	$f(x_k)$	$f_{c_k}(x_k)$
1	10	3.10553	1.12487	-1.8229	-0.2608	-2.608	5.35527	2.74727
2	1	0.51102	0.22026	-0.18418	0.73477	0.73477	0.95154	1.68631
3	0.1	0.34563	0.17220	-0.00287	2.54167	0.254167	0.69003	0.94420
4	0.01	0.34320	0.17160	-0.00008	4.10213	0.04102	0.68640	0.72742
5	0.001	0.34315	0.17160	-0.00004	4.4393	0.00444	0.68640	0.69084
6	0.0001	0.34315	0.17157	-0.000000156	6.80575	0.00068	0.68630	0.6870

Dengan demikian solusi optimal adalah $x^* = (0.34315\,, 0.17157)$, dengan nilai optimal $f(x^*) = 0.6863$. Dari tabel 2 dapat dilihat bahwa setiap titik pada setiap iterasi berada pada bagian dalam daerah layak, dan solusi akhir tetap berada pada bagian dalam daerah layak atau disebut solusi interior. Jika fungsi $f(x) - c_k \log[g(x)]$ diminimalkan untuk barisan nilai c yang menurun, nilai minimum tanpa kendala x_k^* konvergen ke solusi optimal dari masalah berkendala dengan $c \to 0$. Metode barrier efektif untuk menangani kendala ketaksamaan, cenderung lebih stabil dan konsisten dalam menemukan solusi optimal, dan menghasilkan solusi yang lebih halus karena bekerja di dalam daerah yang layak. Namun, metode ini hanya dapat digunakan untuk kendala ketaksamaan dan tidak efektif jika terdapat kendala kesamaan. Selain itu, memerlukan penyesuaian parameter barrier yang tepat, karena nilai yang tidak sesuai dapat menyebabkan konvergensi lambat atau bahkan kegagalan menemukan solusi.

KESIMPULAN

Metode penalti dianggap lebih baik daripada metode barrier karena mampu menangani kendala kesamaan tanpa modifikasi dan tidak memerlukan titik awal yang layak. Menemukan titik awal yang layak seringkali sulit dan memerlukan pencarian solusi yang tidak keluar dari daerah layak. Metode penalti dan metode barrier berkaitan erat dalam optimisasi masalah berkendala. Keduanya mengubah masalah berkendala menjadi masalah tanpa kendala, tetapi dengan pendekatan berbeda. Metode penalti biasanya digunakan untuk memulai pencarian solusi karena dapat memberikan solusi kasar dengan cepat, yang kemudian disempurnakan menggunakan metode barrier yang lebih akurat dalam mendekati batas kendala.

DAFTAR PUSTAKA

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2006). Penalty and Barrier Functions. *Nonlinear Programming*, 469–535. https://doi.org/10.1002/0471787779.ch9

Boyd, P. (2009). *Convex Optimization, Seventh Edition*. Cambridge University Press.

Hiller, Frederick S dan Lieberman, G. J. (2001). *Introduction To Operations Research , Seventh Edition*. The McGraw-Hill Companies,Inc.

Jahn, J. (2020). Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization, Fourth edition. In *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization, Fourth Edition*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42760-3

Jeter, M. W. (2018). Penalty Function Methods. *Mathematical Programming*, 315–336. https://doi.org/10.1201/9780203749333-10

Kemal, K. (2017). *Interior and Exterior Penalty Methods to Solve Nonlinear Optimization Problems College of Natural Sciences Department of Mathematics "In Partial Fulfilment Of The Requirements For The Degree Of Master Of Science In Mathematics."*

Liu, J. L. (2005). Novel orthogonal simulated annealing with fractional factorial analysis to solve global optimization problems. In *Engineering Optimization* (Vol. 37, Issue 5). https://doi.org/10.1080/03052150500066646

Luenberger, D. G. (1984). Linear and Nonlinear. In *Numerical Methods* (pp. 786–787). https://doi.org/10.1017/9781108685306.021

Malisani, P., Chaplais, F., & Petit, N. (2016). An interior penalty method for optimal control problems with state and input constraints of nonlinear systems. *Optimal Control Applications and Methods*, *37*(1), 3–33. https://doi.org/10.1002/oca.2134

Moengin, P. (2008). Penalty Methods in Constrained Optimization. *Computer*, *II*(4), 19–21.

Rao, S. S. (2019). Engineering optimization: Theory and practice. In *Engineering Optimization: Theory and Practice*. https://doi.org/10.1002/9781119454816

Safani, E., & Sari, D. P. (2020). Optimasi produksi tanaman padi dan jagung di Kabupaten Pesisir Selatan menggunakan metode fungsi penalti eksterior. *Journal of Mathematics UNP*, *3*(3), 44–49.

Sativa, O. :, Insani, N., & Sari, R. (2017). Optimasi Tanaman Pangan Di Kota Magelang Dengan Pemrograman Kuadratik Dan Metode Fungsi Penalti Eksterior Optimization of Food Crops in Magelang With Quadratic Programming and Penalty Method. *Jurnal Matematika*, *6*(2), 40.

Sierksma, G., Sierksma, G., & Zwols, Y. (2015). Linear and Integer Optimization. In *Linear and Integer Optimization*. https://doi.org/10.1201/b18378

Sitanggang, R. P. ;, & Sinaga, L. P. (2023). Analisis Optimisasi Program Kuadratik Dengan Fungsi Penalty. *Jurnal Riset Rumpun Ilmu Pendidikan*, *2*(1), 32–42. https://doi.org/10.55606/jurripen.v2i1.812

Sun, W. (2007). *Optimization Theory and Methods Nonlinear Programming Springer Optimization and Its Applications*. 688.

Yeniay, Ö. (2005). Penalty function methods for constrained optimization with genetic algorithms. *Mathematical and Computational Applications*, *10*(1), 45–56. https://doi.org/10.3390/mca10010045