

PENYELESAIAN MODEL ALIRAN FLUIDA NAVIER-STOKES-KORTEWEG DI HALF-SPACE PADA RUANG DIMENSI TIGA

Rizka Alfyyah*

Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta, Kota Tangerang Selatan, Banten, Indonesia, 15412

Suma Inna

Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta, Kota Tangerang Selatan, Banten, Indonesia, 15412

Muhaza Liebenlito

Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta, Kota Tangerang Selatan, Banten, Indonesia, 15412

Abstrak. Model Navier-Stokes-Korteweg adalah model yang menggambarkan aliran fluida dua fase dalam kondisi transisi di antarmuka kedua fase tersebut yang sering disebut sebagai efek kapiler. Artikel ini bertujuan untuk mencari operator solusi dari model Navier-Stokes-Korteweg di half-space pada dimensi tiga ($\mathbf{R}_+^3$) dengan syarat batas slip, melalui beberapa tahapan seperti mereduksi sistem persamaan resolvent tak homogen dari model Navier-Stokes-Korteweg menjadi sistem persamaan resolvent homogen dan melakukan transformasi fourier parsial pada sistem persamaan resolvent homogen tersebut untuk memperoleh sistem persamaan diferensial biasa. Berdasarkan artikel ini ditunjukkan bahwa terdapat operator solusi $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0 F^1, \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0 F^1)$ dari persamaan resolvent model Navier-Stokes-Korteweg di $\mathbf{R}_+^3$ dengan kondisi batas slip untuk kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0, \kappa \neq \mu \nu$.

Kata Kunci: Half-Space, Navier-Stokes-Korteweg, Operator Solusi, Persamaan Resolvent

Abstract. The Navier-Stokes-Korteweg model is a model that describes the flow of two-phase fluids in transitional conditions at the interface of the two phases often referred to as the capillary effect. This article aims to find the solution operator of the Navier-Stokes-Korteweg model in three dimensions half-space ($\mathbf{R}_+^3$) with slip boundary conditions, through several steps such as reducing the non-homogeneous resolvent equation system of the Navier-Stokes-Korteweg model to a homogeneous resolvent system and performing partial Fourier transformation on the homogeneous resolvent system to obtain an ordinary differential equation system. Based on this article, it is shown that there exists a solution operator $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0 F^1, \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0 F^1)$ of the resolvent equation of the Navier-Stokes-Korteweg model in $\mathbf{R}_+^3$ with slip boundary conditions for the case of coefficients $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0, \kappa \neq \mu \nu$.

Keywords: Half-Space, Navier-Stokes-Korteweg, Resolvent Equation, Solution Operator

Sitasi: Alfyyah, R., Inna, S., Liebenlito, M. 2024. Penyelesaian Model Aliran Fluida Navier-Stokes-Korteweg di Half-Space Pada Ruang Dimensi Tiga. *MES (Journal of Mathematics Education and Science)*, 10(1): 88-103.

Submit: 01 Juli 2024	Revise: 12 Juli 2024	Accepted: 15 Agustus 2024	Publish: 10 Oktober 2024
--------------------------------	--------------------------------	-------------------------------------	------------------------------------

PENDAHULUAN

Fluida merupakan suatu zat yang mengalami perubahan secara kontinu (terus-menerus) apabila terkena tekanan atau gaya. Fluida memiliki dua sifat fisik yaitu viskositas (kekentalan) dan densitas (kerapatan). Viskositas diartikan sebagai ukuran kekentalan fluida yang menyatakan besarnya gesekan pada fluida. Sedangkan, densitas adalah massa per satuan volume pada suatu fluida.

Berdasarkan densitasnya, fluida dikategorikan menjadi fluida termampatkan

*Corresponding Author: rizkaalf122@gmail.com

(*compressible fluid*) dan fluida tidak termampatkan (*incompressible fluid*). Fluida termampatkan, densitasnya dapat mengalami perubahan secara signifikan, di mana jika fluida tersebut menerima tekanan maka densitasnya akan meningkat begitu juga sebaliknya jika mengalami ekspansi maka densitasnya akan menurun, contohnya fluida dalam fase gas. Sedangkan untuk fluida tidak termampatkan, perubahan kerapatannya sangat kecil jika mengalami tekanan sehingga perubahan ini diabaikan dan dianggap densitasnya tetap konstan, contohnya fluida dalam fase cair.

Salah satu model matematika yang menggambarkan aliran fluida termampatkan ialah model *Navier-Stokes-Korteweg* (NSK) yang umumnya digunakan dalam menggambarkan aliran gas dan cairan pada kondisi transisi, contohnya transisi air menjadi gas sebab perubahan suhu dan tekanan. Model ini adalah perluasan model *Navier Stokes* (NS) yang medeskripsikan model dasar aliran fluida termampatkan dalam fase gas. Perbedaan utama kedua model ini yaitu, penambahan pada tensor tegangan dengan konstanta kapilaritas (κ) yang biasa disebut sebagai konstanta kapiler.

Penelitian mengenai model NSK telah dibahas sebelumnya oleh beberapa peneliti antara lain, (Liu et al., 2015) mempelajari efek kapilaritas fluida dan transisi dari fase gas ke cair dalam model NSK, (Danchin & Desjardis, 2001) menganalisis eksistensi dan keunikan dari *smooth solution* pada model fluida isothermal termampatkan secara kapiler dan dapat diterapkan untuk fase model transisi, (Hattori & Li, 1996) menunjukkan keberadaan *global solution* sistem NSK dalam dimensi tinggi dengan data awal yang kecil, (Haspot, 2011) membuktikan adanya *global weak solution* dalam model isothermal umum cairan kapiler dan dapat diterapkan untuk fase model transisi, (Kotschote, 2008) membahas eksistensi dan keunikan solusi lokal yang kuat dalam model NSK isothermal, dan penelitian (Saito, 2019) menunjukkan keberadaan keluarga operator solusi *R-bounded* pada model NSK di $\mathbf{R}_+^3$ dengan kondisi batas $\mathbf{n} \cdot \nabla \rho = g$ dan $\mathbf{u} = 0$.

Artikel ini juga merujuk pada penelitian (Inna, Maryani, & Saito, 2020) yang membahas model NSK di *half-space* ($\mathbf{R}_+^N$) dengan syarat batas *slip* untuk kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) < 0$ dan $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0$ dengan $\kappa \neq \mu\nu$. Selain itu, telah dianalisis juga kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0$, $\kappa = \mu\nu$ pada model NSK di $\mathbf{R}_+^N$ dengan kondisi batas *slip* oleh (Inna, Fauziah, Manaqib, & Maya, 2023). Lalu, (Inna dan Saito, 2023) menganalisis keberadaan solusi lokal model NSK yang melibatkan variabel waktu t dengan kondisi batas *slip*. Kemudian, penelitian model NSK di $\mathbf{R}_+^3$ dengan syarat batas *slip* dibahas oleh (Salsabila, Inna, Liebenlito, & Purnomowati, 2024) untuk kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) < 0$ dan $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0$ dengan $\kappa \neq \mu\nu$ dan oleh (Prayugo, Inna, Mahmudi, & Damiati, 2024) untuk kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0$, $\kappa = \mu\nu$. Selanjutnya, (Inna S., 2024) menganalisis lebih lanjut keberadaan *R-bounded* dari operator solusi dalam model NSK di $\mathbf{R}_+^N$ dengan kondisi batas *slip*.

Sedangkan artikel ini, akan berfokus dalam menganalisis model *Navier-Stokes-Korteweg* di domain terbatas *half-space* pada dimensi tiga ($\mathbf{R}_+^3$) dengan syarat batas *slip* pada kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0$, $\kappa \neq \mu\nu$, sehingga persamaan (1) resolvent dirumuskan sebagai berikut,

$$\left. \begin{aligned} \lambda \rho + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) &= d && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda u_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) u_1 - v \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= f_1 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda u_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) u_2 - v \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= f_2 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda u_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) u_3 - v \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= f_3 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \\ \frac{\partial}{\partial s_3} \end{pmatrix} \rho &= g && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ \frac{\partial}{\partial s_3} u_1 + \frac{\partial}{\partial s_1} u_3 &= h_1 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ \frac{\partial}{\partial s_3} u_2 + \frac{\partial}{\partial s_2} u_3 &= h_2 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ u_3 &= h_3 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \end{aligned} \right\}$$

dengan

$$\mathbf{R}_+^3 = \{s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{R}^3, s_3 > 0\},$$

$$\mathbf{R}_0^3 = \{s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{R}^3, s_3 = 0\},$$

λ menyatakan parameter resolvent di $\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} | \Re z > 0\}$, koefisien kapiler dinotasikan dengan κ , dan koefisien viskositas dinotasikan dengan μ dan v . Sedangkan, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(s_1, s_2, s_3) = (u_1(s_1, s_2, s_3), u_2(s_1, s_2, s_3), u_3(s_1, s_2, s_3))^T$ merupakan fungsi vektor dan $\rho = \rho(s_1, s_2, s_3)$ adalah fungsi skalar yang masing-masing menyatakan kecepatan dan massa jenis fluida. Kemudian, $(0, 0, -1)^T \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \frac{\partial}{\partial s_3} \right) \rho = g$, $\frac{\partial}{\partial s_3} u_1 + \frac{\partial}{\partial s_1} u_3 = h_1$, $\frac{\partial}{\partial s_3} u_2 + \frac{\partial}{\partial s_2} u_3 = h_2$, dan $u_3 = h_3$ adalah syarat batas *slip* dengan $\mathbf{n} = (0, 0, -1)^T$ merupakan vektor normal satuan dan mengarah ke luar dari $\mathbf{R}_0^3$.

METODE PENELITIAN

Untuk membuktikan eksistensi operator solusi dari sistem persamaan resolvent (1) akan dilakukan langkah-langkah berikut ini. Pertama, mereduksi sistem persamaan resolvent (1) tak homogen di $\mathbf{R}_+^3$ menggunakan pendekatan solusi operator di *whole-space* ($\mathbf{R}^3$) dengan Eksistensi Genap dan Eksistensi Ganjil, maka didapat sistem persamaan resolvent homogen pada $\mathbf{R}_+^3$. Kemudian, menyelesaikan sistem persamaan homogen tersebut dengan melakukan transformasi fourier parsial, lalu membuktikan bahwa terdapat operator solusi dari sistem persamaan homogen di $\mathbf{R}_+^3$. Terakhir, menjumlahkan operator solusi dari sistem persamaan homogen tersebut dengan operator solusi pada $\mathbf{R}_+^3$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelumnya akan dijelaskan beberapa notasi khusus pada artikel ini, misalkan $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$, dan $\mathbf{C}$ berturut-turut menyatakan himpunan bilangan real, himpunan bilangan asli, dan himpunan bilangan kompleks. Misalkan definisikan $q \in [1, \infty)$ maka $L_q(\mathbf{R}_+^3)$ dan $W_q^m(\mathbf{R}_+^3)$ masing-

masing merupakan ruang Lebesgue dan ruang Sobolev di $\mathbf{R}_+^3$ dengan $m \in \mathbf{N}$ dan untuk $m = 0$ maka $W_q^0(\mathbf{R}_+^3) = L_q(\mathbf{R}_+^3)$, sehingga norma dari ruang Sobolev $W_q^n(\mathbf{R}_+^3)$ dengan $n \in \mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ dinotasikan sebagai $\|\cdot\|_{W_q^n(\mathbf{R}_+^3)}$ yang menyatakan panjang vektor dari ruang Sobolev. Misalkan X dan Y adalah ruang Banach, maka X^m untuk $m \in \mathbf{N}$ adalah hasil perkalian X sebanyak m dan norma dari X^m ditulis sebagai $\|\cdot\|_X$. Himpunan operator linear dari X ke Y dinotasikan sebagai $\mathcal{L}(X, Y)$ sedangkan himpunan operator linear dari X ke X dinotasikan sebagai $\mathcal{L}(X)$. Kemudian, untuk suatu domain $U \subset \mathbf{C}$, $\text{Hol}(U, \mathcal{L}(X, Y))$ merupakan himpunan dari fungsi holomorfik bernilai $\mathcal{L}(X, Y)$ dan terdefinisi pada U .

Dalam memperoleh operator solusi dari sistem persamaan (1), diterapkan pendekatan solusi dari sistem persamaan di *whole-space* ($\mathbf{R}^3$). Berikut ini adalah sistem persamaan (2) yang menyatakan sistem persamaan pada $\mathbf{R}^3$ yaitu,

$$\left. \begin{aligned} \lambda \rho + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) &= d && \text{di } \mathbf{R}^3 \\ \lambda u_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) u_1 - v \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= f_1 && \text{di } \mathbf{R}^3 \\ \lambda u_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) u_2 - v \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= f_2 && \text{di } \mathbf{R}^3 \\ \lambda u_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) u_3 - v \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= f_3 && \text{di } \mathbf{R}^3 \end{aligned} \right\}$$

dengan $\mathbf{R}^3 = \{s | s = (s_1, s_2, s_3)\}$.

Selanjutnya, definisikan ruang pada fungsi ruas kanan untuk sistem persamaan (2), yakni $\mathbf{F}^1 = (d, f_1, f_2, f_3)$ berikut,

$$X_q^1(\mathbf{R}^3) = W_q^1(\mathbf{R}^3) \times L_q(\mathbf{R}^3) \times L_q(\mathbf{R}^3) \times L_q(\mathbf{R}^3).$$

Lalu, definisikan $\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3)$ dan $\mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1$ sebagai berikut,

$$\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3) = L_q(\mathbf{R}^3)^A \text{ dengan } A = (N+1) + N = (3+1) + 1 = 7,$$

$$\mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1 = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} d, \frac{\partial}{\partial s_2} d, \frac{\partial}{\partial s_3} d, \lambda^{\frac{1}{2}} d, f_1, f_2, f_3 \right) \in \mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3).$$

Berdasarkan penelitian (Saito, 2019), dapat dibuktikan teorema berikut,

Teorema 1. Misalkan $q \in (1, \infty)$ dan asumsikan bahwa μ, v , dan κ adalah konstanta positif, maka untuk setiap $\lambda \in \mathbf{C}_+$ terdapat operator $\mathcal{A}^1(\lambda)$ dan $\mathcal{B}^1(\lambda)$ dengan,

$$\mathcal{A}^1(\lambda) \in \text{Hol} \left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L} \left(\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3), W_q^3(\mathbf{R}^3) \right) \right),$$

$$\mathcal{B}^1(\lambda) \in \text{Hol} \left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L} \left(\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3), W_q^2(\mathbf{R}^3)^3 \right) \right),$$

sehingga untuk setiap $\mathbf{F}^1 = (d, f_1, f_2, f_3) \in X_q^1(\mathbf{R}^3)$ diperoleh operator solusi tunggal $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1, \mathcal{B}^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1)$ dari sistem persamaan (2).

Selanjutnya bagian ini, akan menunjukkan proses dalam pembuktian eksistensi dari operator solusi pada sistem persamaan (1). Didefinisikan ruang pada fungsi ruas kanan untuk sistem persamaan (1), $\mathbf{F}^2 = (d, f_1, f_2, f_3, g, h_1, h_2, h_3)$ yaitu,

$$X_q^2(\mathbf{R}_+^3) = W_q^1(\mathbf{R}_+^3) \times L_q(\mathbf{R}_+^3)^3 \times W_q^2(\mathbf{R}_+^3) \times W_q^1(\mathbf{R}_+^3)^2 \times W_q^2(\mathbf{R}_+^3).$$

Kemudian, definisikan $\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3)$ dan $\mathcal{F}_\lambda^2 \mathbf{F}^2$ sebagai berikut,

$$\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3) = L_q(\mathbf{R}_+^3)^B \text{ dengan}$$

$$\begin{aligned} B &= (N+1) + N + (N^2 + N + 1) + (N-1)(N+1) + (N^2 + N + 1) \\ &= (3+1) + 3 + (3^2 + 3 + 1) + (3-1)(3+1) + (3^2 + 3 + 1) = 41, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_\lambda^2 \mathbf{F}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} d, \frac{\partial}{\partial s_2} d, \frac{\partial}{\partial s_3} d, \lambda^{\frac{1}{2}} d \right), f_1, f_2, f_3,$$

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3} g \\ \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} g \\ \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3} g & \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} g & \frac{\partial^2}{\partial s_3^2} g \end{pmatrix}, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_1} g, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_2} g, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_3} g, \lambda g \right), \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_1} h_1, \frac{\partial}{\partial s_2} h_1, \frac{\partial}{\partial s_3} h_1, \frac{\partial}{\partial s_1} h_2, \frac{\partial}{\partial s_2} h_2, \frac{\partial}{\partial s_3} h_2, \lambda^{\frac{1}{2}} h_1, \lambda^{\frac{1}{2}} h_2 \right), \\ \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} h_3 & \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} h_3 & \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3} h_3 \\ \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} h_3 & \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} h_3 & \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} h_3 \\ \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3} h_3 & \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} h_3 & \frac{\partial^2}{\partial s_3^2} h_3 \end{pmatrix}, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_1} h_3, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_2} h_3, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_3} h_3, \lambda h_3 \right) \in \mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3).$$

Membuktikan eksistensi operator solusi dari sistem persamaan (1) merupakan tujuan utama dari artikel ini atau dengan kata lain membuktikan teorema berikut,

Teorema 2. Misalkan $q \in (1, \infty)$ dan asumsikan bahwa μ, ν , dan κ adalah konstanta positif yang memenuhi $\left(\frac{\mu + \nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0$, $\kappa \neq \mu \nu$, maka untuk setiap $\lambda \in \mathbf{C}_+$ terdapat operator $\mathcal{A}^0(\lambda)$ dan $\mathcal{B}^0(\lambda)$ dengan,

$$\mathcal{A}^0(\lambda) \in \text{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^3(\mathbf{R}_+^3)\right)\right),$$

$$\mathcal{B}^0(\lambda) \in \text{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^2(\mathbf{R}_+^3)^3\right)\right),$$

sehingga untuk setiap $\mathbf{F}^2 = (d, f_1, f_2, f_3, g, h_1, h_2, h_3) \in X_q^2(\mathbf{R}_+^3)$ diperoleh operator solusi tunggal $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0 \mathbf{F}^1, \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0 \mathbf{F}^1)$ dari sistem persamaan (1).

Untuk membuktikan **Teorema 2** terdapat beberapa tahapan yaitu,

Reduksi Sistem

Misalkan $u_j = m_j$ untuk $j = 1, 2$, dan $u_3 = m_3 + h_3$ maka diperoleh sistem persamaan (3) dari sistem persamaan (1) yaitu,

$$\left. \begin{aligned} \lambda \rho + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) &= \tilde{d} && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda m_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) m_1 - \nu \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= \tilde{f}_1 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda m_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) m_2 - \nu \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= \tilde{f}_2 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda m_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) m_3 - \nu \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= \tilde{f}_3 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ -\frac{\partial}{\partial s_3} \rho &= g && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ \frac{\partial}{\partial s_3} m_1 + \frac{\partial}{\partial s_1} m_3 &= \tilde{h}_1 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ \frac{\partial}{\partial s_3} m_2 + \frac{\partial}{\partial s_2} m_3 &= \tilde{h}_2 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ m_3 &= 0 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \end{aligned} \right\}$$

dengan $\tilde{d} = d - \frac{\partial}{\partial s_3} h_3$, $\tilde{f}_1 = f_1 + v \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial}{\partial s_3} h_3 \right)$, $\tilde{f}_2 = f_2 + v \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\partial}{\partial s_3} h_3 \right)$, $\tilde{f}_3 = f_3 - \lambda h_3 + \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) h_3 + v \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\frac{\partial}{\partial s_3} h_3 \right)$, $\tilde{h}_1 = h_1 - \frac{\partial}{\partial s_1} h_3$, dan $\tilde{h}_2 = h_2 - \frac{\partial}{\partial s_2} h_3$.

Selanjutnya, mereduksi sistem persamaan (3) terhadap $(d, f_1, f_2, f_3) = (0, 0, 0, 0)$ menggunakan pendekatan solusi operator pada $\mathbf{R}^3$ dengan Eksistensi Genap dan Eksistensi Ganjil. Untuk suatu fungsi $f = f(s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{R}_+^3$, misalkan E^e adalah operator Ekstensi Genap dan E^o merupakan operator Ekstensi Ganjil yang didefinisikan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} E^e f &= E^e f(s_1, s_2, s_3) = \begin{cases} f(s_1, s_2, s_3), & (s_3 > 0), \\ f(s_1, s_2, -s_3), & (s_3 < 0), \end{cases} \\ E^o f &= E^o f(s_1, s_2, s_3) = \begin{cases} f(s_1, s_2, s_3), & (s_3 > 0), \\ -f(s_1, s_2, -s_3), & (s_3 < 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Kemudian, definisikan eksistensi dari fungsi vektor $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^\top$ dengan

$$\mathbf{E}\mathbf{f} = (E^e f_1, E^e f_2, E^o f_3)^\top \quad (4)$$

dengan catatan $E^e \in \mathcal{L}(W_q^1(\mathbf{R}_+^3), W_q^1(\mathbf{R}^3))$ dan $\mathbf{E} \in \mathcal{L}(L_q(\mathbf{R}_+^3)^3, L_q(\mathbf{R}^3)^3)$.

Misalkan, $(\tilde{d}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ adalah fungsi dalam sistem persamaan (3) yang ada pada ruang $W_q^1(\mathbf{R}_+^3) \times L_q(\mathbf{R}_+^3)^3$. Sementara itu, $\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1$ dan $\mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1 = (\mathcal{B}_1^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1, \mathcal{B}_2^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1, \mathcal{B}_3^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1)^\top$ merupakan operator solusi yang ada dalam **Teorema 1** pada $\mathbf{R}^3$. Selanjutnya, definisikan operator K dan $\mathbf{Q}$ yaitu,

$$K = \mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^1(E^e \tilde{d}, E^e \tilde{f}_1, E^e \tilde{f}_2, E^o \tilde{f}_3), \quad \mathbf{Q} = \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^1(E^e \tilde{d}, E^e \tilde{f}_1, E^e \tilde{f}_2, E^o \tilde{f}_3). \quad (5)$$

Kemudian, definisikan operator $H = H(s_1, s_2, s_3)$ dan $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s_1, s_2, s_3) = (P_1(s_1, s_2, s_3), P_2(s_1, s_2, s_3), P_3(s_1, s_2, s_3))$ berturut-turut sebagai berikut,

$$H = K(s_1, s_2, -s_3), \quad \mathbf{P} = (Q_1(s_1, s_2, -s_3), Q_2(s_1, s_2, -s_3), -Q_3(s_1, s_2, -s_3))^\top. \quad (6)$$

Sehingga diperoleh,

$$P_3(s_1, s_2, s_3) = -Q_3(s_1, s_2, -s_3). \quad (7)$$

Substitusi operator H dan $\mathbf{P}$ ke sistem persamaan (3). Maka, diperoleh sistem persamaan (3) baris pertama yaitu,

$$\begin{aligned} \left(\lambda H + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} P_j \right) \right) (s_1, s_2, s_3) &= \left(\lambda K + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} Q_j \right) \right) (s_1, s_2, -s_3) \\ &= E^e \tilde{d}(s_1, s_2, -s_3) = E^e \tilde{d}(s_1, s_2, s_3). \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh sistem persamaan (3) baris kedua sampai keempat sebagai berikut,

$$\begin{aligned} &\left(\lambda P_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) P_1 - v \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} P_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) H \right) (s_1, s_2, s_3) \\ &= \left(\lambda Q_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) Q_1 - v \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} Q_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) K \right) (s_1, s_2, -s_3) \\ &= E^e \tilde{f}_1(s_1, s_2, -s_3) = E^e \tilde{f}_1(s_1, s_2, s_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\lambda P_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) P_2 - v \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} P_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) H \right) (s_1, s_2, s_3) \\ &= \left(\lambda Q_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) Q_2 - v \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} Q_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) K \right) (s_1, s_2, -s_3) \\ &= E^e \tilde{f}_2(s_1, s_2, -s_3) = E^e \tilde{f}_2(s_1, s_2, s_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\lambda P_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) P_3 - v \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} P_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) H \right) (s_1, s_2, s_3) \\ &= \left(\lambda Q_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) Q_3 - v \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} Q_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) K \right) (s_1, s_2, -s_3) \\ &= -E^0 \tilde{f}_3(s_1, s_2, -s_3) = E^0 \tilde{f}_3(s_1, s_2, s_3). \end{aligned}$$

Akibatnya, operator H dan $\mathbf{P}$ juga termasuk operator solusi pada $\mathbf{R}^3$, sehingga berdasarkan ketunggalan solusi pada $\mathbf{R}^3$ maka didapat

$$\begin{cases} P_1(s_1, s_2, s_3) = Q_1(s_1, s_2, s_3) \\ P_2(s_1, s_2, s_3) = Q_2(s_1, s_2, s_3) \\ P_3(s_1, s_2, s_3) = Q_3(s_1, s_2, s_3) \end{cases} \quad (8)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (7) dan (8) didapat $Q_3(s_1, s_2, s_3) = -Q_3(s_1, s_2, -s_3)$, sehingga ketika $s_3 = 0$ maka $Q_3(s_1, s_2, 0) = -Q_3(s_1, s_2, 0)$ jika dan hanya jika $Q_3(s_1, s_2, 0) = 0$.

Misalkan $\rho = K + \tilde{\rho}$ dan $\mathbf{m} = \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{m}} = (Q_1 + \tilde{m}_1, Q_2 + \tilde{m}_2, Q_3 + \tilde{m}_3)$. Substitusi persamaan ρ dan $\mathbf{m}$ ke sistem persamaan (3) maka sistem persamaan homogen (9) didapat

$$\left. \begin{aligned} & \lambda \tilde{\rho} + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} \tilde{m}_j \right) = 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ & \lambda \tilde{m}_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \tilde{m}_1 - v \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} \tilde{m}_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \tilde{\rho} = 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ & \lambda \tilde{m}_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \tilde{m}_2 - v \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} \tilde{m}_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \tilde{\rho} = 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ & \lambda \tilde{m}_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \tilde{m}_3 - v \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} \tilde{m}_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \tilde{\rho} = 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ & \frac{\partial}{\partial s_3} \tilde{\rho} = -\tilde{g} && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ & \frac{\partial}{\partial s_3} \tilde{m}_1 + \frac{\partial}{\partial s_1} \tilde{m}_3 = \tilde{h}_1 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ & \frac{\partial}{\partial s_3} \tilde{m}_2 + \frac{\partial}{\partial s_2} \tilde{m}_3 = \tilde{h}_2 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ & \tilde{m}_3 = 0 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \end{aligned} \right\}$$

dengan $\tilde{g} = g + \frac{\partial}{\partial s_3} \mathcal{A}^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1(E^e \tilde{d}, E^e \tilde{f}_1, E^e \tilde{f}_2, E^0 \tilde{f}_3)$,

$$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_1 - \frac{\partial}{\partial s_3} \mathcal{B}_1^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1(E^e \tilde{d}, E^e \tilde{f}_1, E^e \tilde{f}_2, E^0 \tilde{f}_3) - \frac{\partial}{\partial s_1} \mathcal{B}_3^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1(E^e \tilde{d}, E^e \tilde{f}_1, E^e \tilde{f}_2, E^0 \tilde{f}_3),$$

$$\tilde{h}_2 = \tilde{h}_2 - \frac{\partial}{\partial s_3} \mathcal{B}_2^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1(E^e \tilde{d}, E^e \tilde{f}_1, E^e \tilde{f}_2, E^0 \tilde{f}_3) - \frac{\partial}{\partial s_2} \mathcal{B}_3^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1(E^e \tilde{d}, E^e \tilde{f}_1, E^e \tilde{f}_2, E^0 \tilde{f}_3).$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Homogen di $\mathbf{R}_+^3$

Pada sistem persamaan (9) dapat disederhanakan menjadi sistem persamaan (10) berikut,

$$\left. \begin{aligned} \lambda \rho + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) &= 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda m_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) m_1 - v \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda m_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) m_2 - v \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \lambda m_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) m_3 - v \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right) \rho &= 0 && \text{di } \mathbf{R}_+^3 \\ \frac{\partial}{\partial s_3} \rho &= -g && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ \frac{\partial}{\partial s_3} m_1 + \frac{\partial}{\partial s_1} m_3 &= h_1 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ \frac{\partial}{\partial s_3} m_2 + \frac{\partial}{\partial s_2} m_3 &= h_2 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \\ m_3 &= 0 && \text{pada } \mathbf{R}_0^3 \end{aligned} \right\}$$

Pada sistem persamaan (10), untuk fungsi di ruas kanan $\mathbf{G} = (g, h_1, h_2)$, didefinisikan ruang $\mathbf{G}$ yaitu,

$$\mathcal{Y}_q(\mathbf{R}_+^3) = W_q^2(\mathbf{R}_+^3) \times W_q^1(\mathbf{R}_+^3) \times W_q^1(\mathbf{R}_+^3).$$

Lalu, definisikan $Y_q^2(\mathbf{R}_+^3)$ dan $\mathcal{G}_\lambda \mathbf{G}$ sebagai berikut,

$$Y_q^2(\mathbf{R}_+^3) = L_q(\mathbf{R}_+^3)^C \text{ dengan}$$

$$C = (N^2 + N + 1) + (N - 1)(N + 1) = (3^2 + 3 + 1) + (3 - 1)(3 + 1) = 21,$$

$$\mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3} g \\ \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} g & \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} g \\ \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3} g & \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} g & \frac{\partial^2}{\partial s_3^2} g \end{pmatrix} \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_1} g, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_2} g, \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s_3} g, \lambda g \right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} h_1, \frac{\partial}{\partial s_2} h_1, \frac{\partial}{\partial s_3} h_1, \frac{\partial}{\partial s_1} h_2, \frac{\partial}{\partial s_2} h_2, \frac{\partial}{\partial s_3} h_2, \lambda^{\frac{1}{2}} h_1, \lambda^{\frac{1}{2}} h_2 \right) \in Y_q^2(\mathbf{R}_+^3).$$

Perhatikan teorema berikut ini yang akan digunakan dalam melengkapi pembuktian

Teorema 2.

Teorema 3. Misalkan $q \in (1, \infty)$ dan asumsikan bahwa μ, v , dan κ adalah konstanta positif yang memenuhi $\left(\frac{\mu + v}{2\kappa} \right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa} \right) = 0$, $\kappa \neq \mu v$, maka untuk setiap $\lambda \in \mathbf{C}_+$ terdapat operator $\mathcal{A}^2(\lambda)$ dan $\mathcal{B}^2(\lambda)$ dengan,

$$\mathcal{A}^2(\lambda) \in \text{Hol} \left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L} \left(Y_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^3(\mathbf{R}_+^3) \right) \right),$$

$$\mathcal{B}^2(\lambda) \in \text{Hol} \left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L} \left(Y_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^2(\mathbf{R}_+^3)^3 \right) \right),$$

sehingga untuk setiap $\mathbf{G} = (g, h_1, h_2) \in \mathcal{Y}_q(\mathbf{R}_+^3)$, diperoleh operator solusi tunggal $(\rho, \mathbf{m}) = (\mathcal{A}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G}, \mathcal{B}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G})$ dari sistem persamaan (10).

Pembuktian

Sebelumnya, akan diperkenalkan dahulu definisi dari transformasi fourier parsial dan invers transformasi fourier parsial yaitu,

Definisi 4. Diberikan fungsi f yang terdefinisi di $\mathbf{R}^3$, maka didefinisikan transformasi fourier parsial dari $f = f(s_1, s_2, s_3)$ sebagai berikut,

$\hat{f} = \hat{f}(\xi_1, \xi_2, s_3) = \mathcal{F}[f](\xi_1, \xi_2, s_3) = \int_R \int_R f(s_1, s_2, s_3) e^{-i(\xi_1, \xi_2) \cdot (s_1, s_2)} d_{s_1} d_{s_2}$
dan definisi invers transformasi fourier parsial dari f yaitu,

$$\mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1}[\hat{f}(\xi_1, \xi_2, s_3)](s_1, s_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_R \int_R f(s_1, s_2, s_3) e^{-i(\xi_1, \xi_2) \cdot (s_1, s_2)} d_{\xi_1} d_{\xi_2}.$$

Selanjutnya, misalkan $\varphi = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial s_j} m_j \right)$ kemudian terapkan transformasi fourier parsial pada sistem persamaan (10) maka didapat sistem persamaan diferensial biasa yaitu,

$$\lambda \hat{\rho} + \hat{\varphi} = 0, \quad s_3 > 0, \quad (11)$$

$$\lambda \hat{m}_1 - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{m}_1 - v i \xi_1 \hat{\varphi} - \kappa i \xi_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{\rho} = 0, \quad s_3 > 0, \quad (12)$$

$$\lambda \hat{m}_2 - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{m}_2 - v i \xi_2 \hat{\varphi} - \kappa i \xi_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{\rho} = 0, \quad s_3 > 0, \quad (13)$$

$$\lambda \hat{m}_3 - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{m}_3 - v \frac{\partial}{\partial s_3} \hat{\varphi} - \kappa \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{\rho} = 0, \quad s_3 > 0, \quad (14)$$

dengan syarat batas

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \hat{\rho}(0) = -\hat{g}(0), \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \hat{m}_1(0) + i \xi_1 \hat{m}_3(0) = \hat{h}_1(0), \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \hat{m}_2(0) + i \xi_2 \hat{m}_3(0) = \hat{h}_2(0), \quad (17)$$

$$\hat{m}_3(0) = 0, \quad (18)$$

di mana

$$\hat{\varphi} = i \xi_1 \hat{m}_1 + i \xi_2 \hat{m}_2 + \frac{\partial}{\partial s_3} \hat{m}_3. \quad (19)$$

Pada persamaan (11) dapat ditulis sebagai

$$\hat{\rho} = -\frac{\hat{\varphi}}{\lambda}. \quad (20)$$

Kemudian, substitusi persamaaan (20) ke persamaan (12), (13), (14), dan syarat batas (15) sehingga diperoleh berturut-turut persamaan (21), (22), (23), dan (24) berikut,

$$\lambda^2 \hat{m}_1 - \lambda \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{m}_1 - i \xi_1 \left(v \lambda - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \right) \hat{\varphi} = 0, \quad s_3 > 0,$$

$$\lambda^2 \hat{m}_2 - \lambda \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{m}_2 - i \xi_2 \left(v \lambda - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \right) \hat{\varphi} = 0, \quad s_3 > 0,$$

$$\lambda^2 \hat{m}_3 - \lambda \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{m}_3 - \frac{\partial}{\partial s_3} \left(v \lambda - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \right) \hat{\varphi} = 0, \quad s_3 > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \hat{\varphi}(0) = \lambda \hat{g}(0).$$

Selanjutnya, kalikan persamaan (21) dengan $i \xi_1$ dan persamaan (22) dengan $i \xi_2$ serta turunkan persamaan (23) terhadap s_3 . Kemudian sederhanakan hasil persamaan tersebut berdasarkan persamaan (19) sehingga diperoleh,

$$\lambda^2 \hat{\varphi} - \lambda(\mu + v) \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \hat{\varphi} + \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right)^2 \hat{\varphi} = 0, \quad s_3 > 0. \quad (25)$$

Berdasarkan persamaan (25), definisikan fungsi polinomial $P_\lambda(t)$ yaitu,

$$P_\lambda(t) = \lambda^2 - \lambda(\mu + v) \left(t^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) + \kappa \left(t^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right)^2 = 0, \quad s_3 > 0 \quad (26)$$

sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa yakni,

$$P_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial s_3} \right) \hat{\phi} = 0, \quad s_3 > 0. \quad (27)$$

Misalkan $\omega_\lambda^2 = |\xi'|^2 + \mu^{-1}\lambda$, maka $|\xi'|^2 = \omega_\lambda^2 - \mu^{-1}\lambda$. Substitusi persamaan $|\xi'|^2$ pada persamaan (21), (22), dan (23), didapat

$$\lambda\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - \omega_\lambda^2 \right) \hat{m}_1 + i\xi_1 \left(v\lambda - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \right) \hat{\phi} = 0, \quad s_3 > 0, \quad (28)$$

$$\lambda\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - \omega_\lambda^2 \right) \hat{m}_2 + i\xi_2 \left(v\lambda - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \right) \hat{\phi} = 0, \quad s_3 > 0, \quad (29)$$

$$\lambda\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - \omega_\lambda^2 \right) \hat{m}_3 + \frac{\partial}{\partial s_3} \left(v\lambda - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right) \right) \hat{\phi} = 0, \quad s_3 > 0, \quad (30)$$

Kalikan persamaan (28), (29), dan (30) terhadap $P_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial s_3} \right)$. Kemudian, substitusi hasil persamaan tersebut dengan persamaan (27) sehingga diperoleh,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} - \omega_\lambda^2 \right) P_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial s_3} \right) \hat{m}_J = 0, \quad s_3 > 0 \text{ dengan } J = 1, 2, 3. \quad (31)$$

Selanjutnya, akan dicari akar karakteristik dari persamaan (27) dan (31). Berdasarkan sifat distributif, fungsi polinomial $P_\lambda(t)$ dalam persamaan (26) dapat ditulis sebagai

$$P_\lambda(t) = \kappa\lambda^2 \left(\frac{1}{\kappa} - \left(\frac{\mu+v}{\kappa} \right) \left(\frac{t^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\lambda} \right) + \left(\frac{t^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\lambda} \right)^2 \right). \quad (32)$$

Misalkan $y = \left(\frac{t^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\lambda} \right)$, maka persamaan (32) dapat ditulis menjadi,

$$P_\lambda(t) = \kappa\lambda^2 \mathcal{P}(y)$$

dengan fungsi polinomial $\mathcal{P}(y)$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{P}(y) = y^2 - \frac{\mu+v}{\kappa}y + \frac{1}{\kappa}$$

sehingga diperoleh akar dari fungsi polinomial $\mathcal{P}(y)$ yaitu

$$y_n = \begin{cases} \frac{\mu+v}{2\kappa} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa}}, & \left(\left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} \geq 0 \right) \\ \frac{\mu+v}{2\kappa} \pm i\sqrt{\left| \left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} \right|}, & \left(\left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0 \right) \end{cases}$$

di mana $i = \sqrt{-1}$ atau bisa dinyatakan sebagai y_n ($n = 1, 2, 3, 4$) dengan

$$y_1 = \frac{\mu+v}{2\kappa} + \sqrt{\left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa}} \text{ dan } y_2 = \frac{\mu+v}{2\kappa} - \sqrt{\left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa}} \quad \text{untuk } \left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} \geq 0$$

$$y_3 = \frac{\mu+v}{2\kappa} + i\sqrt{\left| \left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} \right|} \text{ dan } y_4 = \frac{\mu+v}{2\kappa} - i\sqrt{\left| \left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} \right|} \quad \text{untuk } \left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0$$

Sehingga akar dari fungsi polinomial $P_\lambda(t)$ adalah

$$t = \pm \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + y_n \lambda}, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + y_1 \lambda} & t_2 &= \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + y_2 \lambda} \\ t_3 &= -\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + y_3 \lambda} & t_4 &= -\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + y_4 \lambda} \end{aligned}$$

Dengan demikian, akar karakteristik dari persamaan (32) yaitu,

$$t_1 = \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + y_1 \lambda} \quad t_2 = \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + y_2 \lambda}$$

Karena dalam artikel ini membahas kasus koefisien $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} = 0$, $\kappa \neq \mu v$, maka diperoleh $y_1 = y_2 = \frac{\mu+v}{2\kappa}$, sehingga diperoleh akar karakteristik dari persamaan (32) yaitu,

$$t_1 = t_2 = \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)\lambda}.$$

Maka, solusi umum yang diperoleh dari persamaan (27) dan (31) yaitu,

$$\hat{m}_j = \alpha_j e^{-\omega_\lambda s_3} + \beta_j (e^{-t_2 s_3} - e^{-\omega_\lambda s_3}) + \gamma_j s_3 e^{-t_2 s_3}, \quad (33)$$

$$\hat{\phi} = \sigma e^{-t_2 s_3} + \tau s_3 e^{-t_2 s_3}. \quad (34)$$

Substitusi persamaan (33) ke persamaan (19) diperoleh

$$\sigma = i\xi' \cdot \beta' - t_2 \beta_3 + \gamma_3, \quad (35)$$

$$\tau = i\xi' \cdot \gamma' - t_2 \gamma_3, \quad (36)$$

$$0 = i\xi' \cdot \alpha' - i\xi' \cdot \beta' - \omega_\lambda \alpha_3 + \omega_\lambda \beta_3, \quad (37)$$

di mana, $i\xi' \cdot a' = \sum_{j=1}^2 i\xi_j a_j$ untuk $a \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Berdasarkan asumsi $\kappa \neq \mu, v$, substitusi persamaan (33) dan (34) pada persamaan (28), (29), dan (30) sehingga didapat

$$\lambda\mu[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_1 - 2t_2\gamma_1] + i\xi_1\sigma[\lambda v - \kappa(t_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2))] + 2\kappa i\xi_1 t_2 \tau = 0, \quad (38)$$

$$\lambda\mu(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\gamma_1 + i\xi_1\tau[\lambda v - \kappa(t_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2))] = 0, \quad (39)$$

$$\lambda\mu[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_2 - 2t_2\gamma_2] + i\xi_2\sigma[\lambda v - \kappa(t_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2))] + 2\kappa i\xi_2 t_2 \tau = 0, \quad (40)$$

$$\lambda\mu(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\gamma_2 + i\xi_2\tau[\lambda v - \kappa(t_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2))] = 0, \quad (41)$$

$$\lambda\mu[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_3 - 2t_2\gamma_3] + (-t_2\sigma + \tau)[\lambda v - \kappa(t_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2))] - 2\kappa t_2^2 \tau = 0 \quad (42)$$

$$\lambda\mu(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\gamma_3 - t_2\tau[\lambda v - \kappa(t_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2))] = 0. \quad (43)$$

Karena $t_2^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)\lambda$, maka $\lambda v - \kappa(t_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)) = \left(\frac{v-\mu}{2}\right)\lambda$. Substitusi persamaan tersebut pada persamaan (38) sampai persamaan (43) sehingga diperoleh

$$2\lambda\mu[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_1 - 2t_2\gamma_1] + i\xi_1\sigma(v - \mu)\lambda + 4\kappa i\xi_1 t_2 \tau = 0, \quad (44)$$

$$2\mu(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\gamma_1 + i\xi_1\tau(v - \mu)\lambda = 0, \quad (45)$$

$$2\lambda\mu[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_2 - 2t_2\gamma_2] + i\xi_2\sigma(v - \mu)\lambda + 4\kappa i\xi_2 t_2 \tau = 0, \quad (46)$$

$$2\mu(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\gamma_2 + i\xi_2\tau(v - \mu)\lambda = 0, \quad (47)$$

$$2\lambda\mu[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_3 - 2t_2\gamma_3] + (-t_2\sigma + \tau)(v - \mu)\lambda - 4\kappa t_2^2 \tau = 0, \quad (48)$$

$$2\mu(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\gamma_3 - t_2\tau(v - \mu)\lambda = 0. \quad (49)$$

Berdasarkan persamaan (45), (47), dan (49) diperoleh

$$2\mu(t_2^2 - \omega_\lambda^2)(t_2\gamma_j + i\xi_j\gamma_3) = 0, \text{ untuk } j = 1, 2.$$

Karena $t_2 \neq \omega_\lambda$ maka diperoleh

$$\gamma_j = -\frac{i\xi_j}{t_2}\gamma_3, \text{ untuk } j = 1, 2. \quad (50)$$

Lalu, kalikan $i\xi_j$ pada persamaan (50) dan jumlahkan hasilnya untuk $j = 1, 2$ diperoleh

$$i\xi' \cdot \gamma' = \frac{|\xi'|^2}{t_2}\gamma_3. \quad (51)$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai τ , substitusi persamaan (51) ke persamaan (36) maka

$$\tau = -\left(\frac{t_2^2 - |\xi'|^2}{t_2}\right)\gamma_3 \quad (52)$$

dengan $|\xi'|^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)$.

Kemudian, kalikan persamaan (44) dengan t_2 dan (48) dengan $i\xi_1$. Lalu jumlahkan hasilnya sehingga diperoleh persamaan berikut,

$$2\mu t_2[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_1 - 2t_2\gamma_1] + 2\lambda i\xi_1[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_3 - 2t_2\gamma_3] + i\xi_1\tau(v - \mu)\lambda = 0. \quad (53)$$

Lakukan langkah yang sama untuk persamaan (46) dan (48) diperoleh

$$2\mu t_2[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_2 - 2t_2\gamma_2] + 2\lambda i\xi_2[(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_3 - 2t_2\gamma_3] + i\xi_2\tau(v - \mu)\lambda = 0. \quad (54)$$

Setelah itu, substitusi persamaan (50) ke persamaan (53) dan (54) sehingga didapat

$$2\mu t_2(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_j = -2\mu i\xi_j(t_2^2 - \omega_\lambda^2)\beta_3 - i\xi_j\tau(v - \mu)\lambda, \text{ untuk } j = 1, 2.$$

Karena $t_2 \neq \omega_\lambda$ maka diperoleh,

$$\beta_j = -\frac{i\xi_j}{t_2}\beta_3 - \frac{i\xi_j}{t_2}\left(\frac{\tau}{t_2^2 - \omega_\lambda^2}\right)\left(\frac{v-\mu}{2\mu}\right), \text{ untuk } j = 1, 2.$$

Berdasarkan asumsi bahwa $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} = 0$ maka diperoleh hubungan berikut,

$$\frac{\mu+v}{2\kappa} = \frac{2}{\mu+v}$$

serta berdasarkan persamaan $t_2^2 = |\xi'|^2 + \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)\lambda$ dan $\omega_\lambda^2 = |\xi'|^2 + \mu^{-1}\lambda$, diperoleh

$$t_2^2 - \omega_\lambda^2 = -\frac{(v-\mu)}{\mu(\mu+v)}\lambda. \quad (55)$$

Substitusi persamaan (52) dan (55) ke persamaan koefisien β_j sehingga diperoleh,

$$\beta_j = -\frac{i\xi_j}{t_2}\beta_3 - \frac{i\xi_j}{t_2^2}\gamma_3, \text{ untuk } j = 1, 2. \quad (56)$$

Selanjutnya, kalikan $i\xi_j$ ke persamaan (56) dan jumlahkan hasilnya untuk $j = 1, 2$, maka

$$i\xi' \cdot \beta' = \frac{|\xi'|^2}{t_2}\beta_3 + \frac{|\xi'|^2}{t_2^2}\gamma_3. \quad (57)$$

Berdasarkan hasil substitusi dari persamaan (57) pada persamaan (35) diperoleh

$$\sigma = -\left(\frac{t_2^2 - |\xi'|^2}{t_2}\right)\beta_3 + \left(\frac{t_2^2 + |\xi'|^2}{t_2^2}\right)\gamma_3. \quad (58)$$

Berikutnya, substitusi persamaan (33) pada syarat batas (18) diperoleh

$$\hat{m}_3(0) = \alpha_3 e^{-\omega_\lambda 0} + \beta_3 (e^{-t_2 0} - e^{-\omega_\lambda 0}) + \gamma_3(0) e^{-t_2 0} = \alpha_3$$

karena $\hat{m}_3(0) = 0$ akibatnya $\alpha_3 = 0$.

Setelah itu, turunkan $\hat{m}_j$ dalam persamaan (33) terhadap s_3 maka diperoleh,

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \hat{m}_j = (-\alpha_j + \beta_j)\omega_\lambda e^{-\omega_\lambda s_3} + (-\beta_j t_2 + \gamma_j)e^{-t_2 s_3} - \gamma_j t_2 s_3 e^{-t_2 s_3}. \quad (59)$$

Ketika $s_3 = 0$, maka persamaan (59) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \hat{m}_j(0) = (-\alpha_j + \beta_j)\omega_\lambda + (-\beta_j t_2 + \gamma_j). \quad (60)$$

Kemudian, substitusi persamaan (60) terhadap syarat batas (16) dan (17) yaitu,

$$\hat{h}_j(0) = -\alpha_j \omega_\lambda + (\omega_\lambda - t_2)\beta_j + \gamma_j. \quad (61)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (50) dan (56) pada persamaan (61) sehingga diperoleh,

$$\alpha_j = \omega_\lambda^{-1} \left\{ -\hat{h}_j(0) + (t_2 - \omega_\lambda) \frac{i\xi_j}{t_2} \beta_3 - \frac{\omega_\lambda i\xi_j}{t_2^2} \gamma_3 \right\}. \quad (62)$$

Lalu, berdasarkan persamaan (37) dan $\alpha_3 = 0$ maka

$$\omega_\lambda i\xi' \cdot \alpha' = \omega_\lambda i\xi' \cdot \beta' - \omega_\lambda^2 \beta_3. \quad (63)$$

Kemudian untuk mencari koefisien β_3 dan γ_3 , pertama kalikan persamaan (61) dengan $i\xi_j$ lalu substitusikan hasilnya dengan persamaan (51), (57), dan (63) sehingga diperoleh,

$$i\xi' \cdot \hat{h}'(0) = (\omega_\lambda^2 - |\xi'|^2)\beta_3$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$\beta_3 = \frac{i\xi' \cdot \hat{h}'(0)}{(\omega_\lambda^2 - |\xi'|^2)} = \frac{\mu}{\lambda} i\xi' \cdot \hat{h}'(0). \quad (64)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (34) ke syarat batas (24) maka diperoleh,

$$\lambda \hat{g}(0) = -t_2 \sigma + \tau. \quad (65)$$

Kemudian, substitusi persamaan (52) dan (58) ke persamaan (65) sehingga diperoleh,

$$\lambda \hat{g}(0) = (t_2^2 - |\xi'|^2)\beta_3 - 2t_2 \gamma_3. \quad (66)$$

Setelah itu, lakukan substitusi persamaan (64) ke persamaan (66) maka diperoleh,

$$\gamma_3 = -\frac{1}{2t_2} \left(\lambda \hat{g}(0) - y_2 \mu i\xi' \cdot \hat{h}'(0) \right). \quad (67)$$

Berikutnya, substitusi koefisien pada persamaan (64) dan (67) ke persamaan (50), (52), (56), (58), dan (62) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$\gamma_j = \frac{i\xi_j}{2t_2^2} \left(\lambda \hat{g}(0) - y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) \quad (68)$$

$$\tau = \frac{y_2 \lambda}{2t_2^2} \left(\lambda \hat{g}(0) - y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) \quad (69)$$

$$\beta_j = -\frac{\mu i \xi_j}{\lambda t_2} i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) + \frac{i \xi_j}{2t_2^3} \lambda \hat{g}(0) - \frac{i \xi_j}{2t_2^3} y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \quad (70)$$

$$\sigma = -\frac{t_2^2 + |\xi'|^2}{2t_2^3} \lambda \hat{g}(0) - \frac{y_2^2 \lambda}{2t_2^3} \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \quad (71)$$

$$\alpha_j = -\omega_\lambda^{-1} \hat{h}_j(0) + (t_2 - \omega_\lambda) \frac{\mu i \xi_j}{\lambda \omega_\lambda t_2} i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) + \frac{i \xi_j}{2t_2^3} \lambda \hat{g}(0) - \frac{i \xi_j}{2t_2^3} y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \quad (72)$$

Karena $\hat{\rho} = -\frac{\hat{\varphi}}{\lambda}$ dan berdasarkan hasil substitusi persamaan (69) dan (71) ke persamaan (34), maka diperoleh persamaan (73) berikut

$$\hat{\rho} = \left(\frac{t_2^2 + |\xi'|^2}{2t_2^3} \hat{g}(0) + \frac{y_2^2}{2t_2^3} \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) e^{-t_2 s_3} - \frac{y_2}{2t_2^2} \left(\lambda \hat{g}(0) - y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) s_3 e^{-t_2 s_3}.$$

Misalkan,

$$\mathcal{Z}(s_3) = \frac{e^{-t_2 s_3} - e^{-\omega_\lambda s_3}}{t_2 - \omega_\lambda}. \quad (74)$$

Substitusi persamaan persamaan (68), (70), (72), dan (74) terhadap bentuk solusi umum persamaan karakteristik (33) sehingga diperoleh persamaan (75) dan (76) berikut,

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 = & \left(-\omega_\lambda^{-1} \hat{h}_1(0) + \frac{i \xi_1}{2t_2^3} \lambda \hat{g}(0) \right) e^{-\omega_\lambda s_3} + \left(\frac{y_2 \mu i \xi_1}{(t_2 + \omega_\lambda) \omega_\lambda t_2} - \frac{i \xi_1}{(t_2 + \omega_\lambda) \omega_\lambda t_2} - \right. \\ & \left. \frac{y_2 \mu i \xi_1}{2t_2^3} \right) i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) e^{-\omega_\lambda s_3} + \left(\frac{(y_2 - \mu) i \xi_1 \lambda^2}{2(t_2 + \omega_\lambda) t_2^3} \hat{g}(0) - \frac{(y_2 - \mu)(2t_2^2 + \lambda y_2) \mu i \xi_1}{(t_2 + \omega_\lambda) 2t_2^3} i \xi' \cdot \right. \\ & \left. \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) \mathcal{Z}(s_3) + \frac{i \xi_1}{2t_2^2} \left(\lambda \hat{g}(0) - y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) s_3 e^{-t_2 s_3} \\ \hat{m}_2 = & \left(-\omega_\lambda^{-1} \hat{h}_2(0) + \frac{i \xi_2}{2t_2^3} \lambda \hat{g}(0) \right) e^{-\omega_\lambda s_3} + \left(\frac{y_2 \mu i \xi_2}{(t_2 + \omega_\lambda) \omega_\lambda t_2} - \frac{i \xi_2}{(t_2 + \omega_\lambda) \omega_\lambda t_2} - \right. \\ & \left. \frac{y_2 \mu i \xi_2}{2t_2^3} \right) i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) e^{-\omega_\lambda s_3} + \left(\frac{(y_2 - \mu) i \xi_2 \lambda^2}{2(t_2 + \omega_\lambda) t_2^3} \hat{g}(0) - \frac{(y_2 - \mu)(2t_2^2 + \lambda y_2) \mu i \xi_2}{(t_2 + \omega_\lambda) 2t_2^3} i \xi' \cdot \right. \\ & \left. \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) \mathcal{Z}(s_3) + \frac{i \xi_2}{2t_2^2} \left(\lambda \hat{g}(0) - y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) s_3 e^{-t_2 s_3}. \end{aligned}$$

Setelah itu, substitusi persamaan (64), (67), (74), dan $\alpha_3 = 0$ pada solusi umum persamaan karakteristik (33) sehingga diperoleh persamaan (77) berikut,

$$\hat{m}_3 = \frac{\mu(y_2 - \mu)}{t_2 + \omega_\lambda} i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \mathcal{Z}(s_3) - \frac{1}{2t_2} \left(\lambda \hat{g}(0) - y_2 \mu i \xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \right) s_3 e^{-t_2 s_3}.$$

Selanjutnya, aplikasikan invers transformasi fourier parsial pada persamaan (73), (75), (76), dan (77) maka didapat,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{y_2^2 \mu i \xi_n}{2t_2^3} \hat{h}_n(0) e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) + \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\left(-\frac{\xi_n \xi_n}{2t_2^3} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2t_2} \right) \hat{g}(0) e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) - \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{y_2 \lambda}{2t_2^2} \hat{g}(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) + \\ & \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{y_2^2 \mu i \xi_n}{2t_2^3} \hat{h}_n(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} =: & \mathcal{A}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} \\ \hat{m}_1 = & -\mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\omega_\lambda^{-1} \hat{h}_1(0) e^{-\omega_\lambda s_3} \right] (s_1 s_2) + \\ & \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{i \xi_1 \lambda}{2t_2^3} \hat{g}(0) e^{-\omega_\lambda s_3} \right] (s_1 s_2) + \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\left(\frac{y_2 \mu i \xi_1 i \xi_n}{(t_2 + \omega_\lambda) \omega_\lambda t_2} - \right. \right. \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{i\xi_1 i\xi_n}{(t_2 + \omega_\lambda)\omega_\lambda t_2} - \frac{y_2 \mu i\xi_1 i\xi_n}{2t_2^3} \right] \hat{h}_n(0) e^{-\omega_\lambda s_3} \Big] (s_1 s_2) - (y_2 - \\
 & \mu) \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{(2t_2^2 + \lambda y_2) \mu i\xi_1 i\xi_n}{(t_2 + \omega_\lambda) 2t_2^3} \hat{h}_n(0) \mathcal{Z}(s_3) \right] (s_1 s_2) + \\
 & \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{(y_2 - \mu) i\xi_1 \lambda^2}{2(t_2 + \omega_\lambda) t_2^3} \hat{g}(0) \mathcal{Z}(s_3) \right] (s_1 s_2) + \\
 & \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{i\xi_1 \lambda}{2t_2^2} \hat{g}(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) - \\
 & \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{y_2 \mu i\xi_1 i\xi_n}{2t_2^2} \hat{h}_n(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) \\
 \hat{m}_1 = & \mathcal{B}_1^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} \\
 \hat{m}_2 = & -\mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\omega_\lambda^{-1} \hat{h}_2(0) e^{-\omega_\lambda s_3} \right] (s_1 s_2) + \\
 & \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{i\xi_2 \lambda}{2t_2^3} \hat{g}(0) e^{-\omega_\lambda s_3} \right] (s_1 s_2) + \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\left(\frac{y_2 \mu i\xi_2 i\xi_n}{(t_2 + \omega_\lambda) \omega_\lambda t_2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{i\xi_2 i\xi_n}{(t_2 + \omega_\lambda) \omega_\lambda t_2} - \frac{y_2 \mu i\xi_2 i\xi_n}{2t_2^3} \right) \hat{h}_n(0) e^{-\omega_\lambda s_3} \right] (s_1 s_2) - (y_2 - \\
 & \mu) \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{(2t_2^2 + \lambda y_2) \mu i\xi_2 i\xi_n}{(t_2 + \omega_\lambda) 2t_2^3} \hat{h}_n(0) \mathcal{Z}(s_3) \right] (s_1 s_2) + \\
 & \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{(y_2 - \mu) i\xi_2 \lambda^2}{2(t_2 + \omega_\lambda) t_2^3} \hat{g}(0) \mathcal{Z}(s_3) \right] (s_1 s_2) + \\
 & \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{i\xi_2 \lambda}{2t_2^2} \hat{g}(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) - \\
 & \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{y_2 \mu i\xi_2 i\xi_n}{2t_2^2} \hat{h}_n(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) \\
 \hat{m}_2 = & \mathcal{B}_2^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} \\
 \hat{m}_3 = & \mu(y_2 - \mu) \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{i\xi_n}{t_2 + \omega_\lambda} \hat{h}_n(0) \mathcal{Z}(s_3) \right] (s_1 s_2) - \\
 & \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{\lambda}{2t_2} \hat{g}(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) + \\
 & \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_{(\xi_1, \xi_2)}^{-1} \left[\frac{y_2 \mu i\xi_n}{2t_2} \hat{h}_n(0) s_3 e^{-t_2 s_3} \right] (s_1 s_2) + \\
 \hat{m}_3 = & \mathcal{B}_3^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G}.
 \end{aligned} \tag{80}$$

Oleh karena itu, **Teorema 3** terbukti bahwa terdapat operator solusi $(\rho, \mathbf{m}) = (\mathcal{A}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G}, \mathcal{B}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G})$ dengan $\mathcal{B}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} = (\mathcal{B}_1^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G}, \mathcal{B}_2^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G}, \mathcal{B}_3^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G})^\top$ dari sistem persamaan homogen (10) di $\mathbf{R}_+^3$. Kemudian untuk melanjutkan pembuktian **Teorema 2**, jumlahkan operator solusi dari sistem persamaan homogen (10) yaitu persamaan (78), (79), (80), dan (81) dengan operator solusi pada $\mathbf{R}_+^3$, di mana telah diketahui sebelumnya dari hasil pendekatan operator solusi pada $\mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned}
 \rho &= K + \tilde{\rho} \\
 &= \mathcal{A}^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1 + \mathcal{A}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} \\
 &= \mathcal{A}^0(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^0 \mathbf{F}^1
 \end{aligned}$$

Lalu, definisikan $\mathbf{u} = \mathbf{m} + h\mathbf{n}$ dengan $\mathbf{m} = \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{m}}$ maka $\mathbf{u}$ dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{m} + h\mathbf{n} \\
 &= \mathcal{B}^1(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^1 \mathbf{F}^1 + \mathcal{B}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} \\
 &= \mathcal{B}^0(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^0 \mathbf{F}^1
 \end{aligned}$$

Jadi, operator solusi dari sistem persamaan resolvent (1) adalah $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^0(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^0 \mathbf{F}^1, \mathcal{B}^0(\lambda) \mathcal{F}_\lambda^0 \mathbf{F}^1)$ sehingga dapat disimpulkan **Teorema 2** terbukti.

KESIMPULAN

Melalui beberapa tahapan seperti mereduksi sistem persamaan resolvent tak homogen dari model *Navier-Stokes-Korteweg*, melakukan transformasi fourier parsial pada sistem persamaan resolvent homogen, membuktikan terdapat operator solusi dari sistem persamaan

homogen di $\mathbf{R}_+^3$, dan menjumlahkan operator solusi dari sistem persamaan homogen dengan operator solusi pada $\mathbf{R}_+^3$. Maka didapat operator solusi sistem persamaan resolvent yakni $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^1, \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^1)$, sehingga terbukti bahwa terdapat operator solusi dari sistem persamaan resolvent model Navier-Stokes-Korteweg di half-space ($\mathbf{R}_+^3$) dengan kondisi batas slip untuk kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0, \kappa \neq \mu \nu$.

DAFTAR PUSTAKA

- Danchin, R., & Desjardins, B. (2001). Existence of solutions for compressible fluid models of korteweg type. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Lineaire*, 18(1), 97-133. [https://doi.org/10.1016/S0294-1449\(00\)00056-1](https://doi.org/10.1016/S0294-1449(00)00056-1)
- Haspot, B. (2011). Existence of weak solution for compressible fluid models of Korteweg type. *J. Math. Fluid Mech*, 13, 223-249. <https://doi.org/10.1007/s00021-009-0013-2>
- Hattori, H. H. H., & Li, D. (1996). Global Solutions of a High Dimensional System for Korteweg Materials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 198, 84-97. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0069>
- Inna S. (2024). The Existence Of R-Bounded Solution Operator For Navier Stokes Korteweg Model With Slip Boundary Conditions In Half Space. *Mathematical Method in The Applied Science*, 47(11), 8581-8610. <https://doi.org/10.1002/mma.10033>
- Inna, S., Fauziah, I., Manaqib, M., & Maya Putri, P. (2023). Operator Solusi Model Fluida Termampatkan Tipe Korteweg Dengan Kondisi Batas Slip di Half-Space Kasus Koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) < 0, \kappa = \mu \nu, \mu \neq \nu$. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 20(2), 191-208. <https://doi.org/10.12962/limits.v20i2.12954>
- Inna, S., Maryani, S., & Saito, H. (2020). Half-space model problem for a compressible fluid model of Korteweg type with slip boundary condition. *Journal of Physics: Conference Series*, 1494(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1494/1/012014>
- Inna, S., & Saito, H. (2023). Local Solvability for a Compressible Fluid Model of Korteweg Type on General Domains. *Mathematics*, 11(10). <https://doi.org/10.3390/math11102368>
- Khasanah, D.W.N., Inna, S., Wijaya, M.Y., Hasanah, S.I. ANALISIS MODEL LINEAR NAVIER STOKES KORTEWEG DENGAN KONDISI BATAS NEUMANN DI HALF-SPACE BERDIMENSI TIGA. *Jurnal Absis: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika, to appear*.
- Kotschote, M. (2008). Strong solutions for a compressible fluid model of Korteweg type. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Lineaire*, 25(4), 679-696. <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2007.03.005>
- Liu, J., Landis, C. M., Gomez, H., & Hughes, T. J. R. (2015). Liquid-vapor phase transition: Thermomechanical theory, entropy stable numerical formulation, and boiling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 297, 476-553. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.09.007>
- Munson, B.R., Okiishi, T.H., Huebsch, W.W., & Rothmayer, A.P. (2013). Fundamentals of Fluid Mechanics Seventh Edition. *John Wiley & Sons, Inc.*
- Prayugo, J., Inna, S., Mahmudi, & Damiati, N. (2024). SOLUSI MODEL LINEAR NAVIER-STOKES-KORTEWEG DI $\mathbf{R}_+^3$ DENGAN SYARAT BATAS SLIP. *Lebesgue: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika, dan Statistika*, 5(1), 262-277. <https://doi.org/10.46306/lb.v5i1.554>
- Pritchard, P. J. (2011). Introduction to Fluid Mechanics Eighth Edition. *John Wiley & Sons, Inc.*

Saito, H. (2019). Existence of $\mathcal{R}$ -bounded solution operator families for a compressible fluid model of Korteweg type on the half-space. <http://arxiv.org/abs/1901.06461>

Salsabila, A., Inna, S., Liebenlito, M., & Purnomowati, R. (2024). SOLUSI MODEL NAVIER STOKES KORTEWEG DENGAN SYARAT BATAS SLIP DI HALF-SPACE BERDIMENSI 3. *Majamath: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 7(1), 24-43. <https://doi.org/10.36815/majamath.v7i1.3158>