**ANALISIS DAN PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA PADA RANGKAIAN LISTRIK ORDE DUA**

**Fitrah Sari Wahyuni Harahap\***

Universitas Potensi Utama, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20241

**Abstrak.** Fenomena fisik rangkaian listrik menghasilkan model matematika dan solusi untuk penyelesaiannya. Rangkaian listrik orde dua adalah penggunaan persamaan differensial orde dua sebagai model persamaan matematika pada rangkaian listrik. Rangkaian tersebut diantaranya rangkaian LC seri dan RLC seri. Penelitian ini memaparkan analisis dan penyelesaian dari model matematika pada rangkaian listrik LC seri dan RLC seri menggunakan persamaan diferensial orde dua dengan solusi homogen maupun tak homogen.

**Kata Kunci:** model matematika, persamaan diferensial orde dua, rangkaian LC, rangkaian RLC.

**Abstract.** Fenomena electric circuit produces mathematical models and solutions for completion. The two-order electric circuit is an electrical circuit that can be modeled with two-order differential equations. The series include LC series and RLC series. This research displays the analysis and completion of the mathematical model on the LC series electrical circuits and RLC series using two-order differential equations with a homogeneous or nonhomogeneous solution.

**Keywords:** Mathematical models, two-order differential equations, LC series, RLC series.

**PENDAHULUAN**

Persamaan Differensial Orde Dua

Ada 4 tipe model persamaan differensial orde dua, yaitu :

1. Tipe
2. Tipe
3. Tipe a
4. Tipe a

Rangkaian LC

Rangkaian LC terdiri dari tegangan sumber Vd, induktor L dan kapasitor C yang merupakan rangkaian listrik sederhana. Komponen tegangan sumber, induktor, dan kapasitor disusun secara seri. Karena tidak ada resistor yang berfungsi sebagai dumper, rangkaian ini disebut undumped.



*Gambar 1. Rangkaian LC*

Rangkaian sederhana LC (undamped series-resonant circuit) pada gambar 1 dengan tegangan input *Vd* saat *t0*. Pada saat *t0* dari state variable arus induktor *iL* dan tegangan kapasitor *vc* adalah *IL0* dan *VC0*.

Rangkaian RLC

Komponen resistor (R), induktor (L) dan kapasitor (C) yang dihubungkan dengan sumber tegangan AC pada arus bolak-balik dan disusun secara seri adalah rangkaian RLC seri. Resistansi adalah hambatan yang dihasilkan oleh resistor, reaktansi induktif (XL) adalah hambatan yang dihasilkan oleh induktor, dan reaktansi kapasitif (XC) adalah hambatan yang dihasilkan oleh kapasitor. Impedansi (Z) adalah ketika ketiga besar hambatan tersebut digabungkan atau disebut sebagai hambatan total.



*Gambar 2. Rangkaian seri RLC*

Hukum Kirchoff

[Rangkaian listrik](https://www.studiobelajar.com/rangkaian-listrik/) sederhana adakalanya tidak dapat dianalisis dengan hanya mengganti kombinasi rangkaian seri dan paralel resistor, terutama dalam menyederhanakan rangkaian listrik sederhana yang memiliki resistor yang banyak.



*Gambar 3. Rangkaian Listrik Sederhana*

Hukum Kirchoff 1 menyatakan bahwa: “Jumlah arus listrik yang masuk melalui titik percabangan dalam suatu rangkaian listrik sama dengan jumlah arus yang keluar melalui titik percabangan tersebut”



*Gambar 4. Arus masuk dan arus keluar percabangan*

Hukum Kirchhoff 1 secara umum adalah sebagai berikut:

∑I masuk = ∑Ikeluar

Hukum Kirchoff 2

Bunyi hukum Kirchhoff 2 adalah “Pada setiap rangkaian tertutup, jumlah beda potensialnya harus sama dengan nol”. Hukum Kirchoff 2 juga sering disebut sebagai hukum simpal (loop rule) dan merupakan bukti dari adanya hukum konservasi energi karena adanya keadaan konstan untuk beda potensial diantara dua titik percabangan dalam satu rangkaian pada keadaan tunak.

Dapat kita lihat penerapan hukum Kirchoff 2 pada rangkaian yang berisi dua buah baterai dan tiga resistor eksternal. Pada setiap resistor yang berada pada potensial lebih tinggi dan untuk arah arus yang diasumsikan kita gunakan tanda plus minus.

Secara umum rumus hukum Kirchoff 2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

*∑E +∑IR = 0*



*Gambar 5. Rangkaian yang berisi dua baterai dan tiga resistor*

**METODE**

Dalam penelitian ini metode yang penulis gunakan adalah metode kajian literatur yaitu mengambil rujukan dan perbandingan pemecahan masalah pemodelan matematika persamaan differensial orde dua untuk rangkaian listrik dari buku-buku dan jurnal online matematika sebagai penunjang untuk persamaan diferensial orde dua dalam menentukan solusi homogen maupun tak homogen untuk rangkaian listrik LC seri dan rangkaian RLC seri.

Adapun metode yang penulis lakukan adalah dengan beberapa langkah, sebagai berikut:

1. Menentukan model matematika yaitu persamaan diferensial orde dua,
2. Melakukan penurutan rumus untuk memperoleh solusi homogen maupun tak homogen,
3. Mengaplikasikan model yang dipilih ke penyelesaian model matematika untuk rangkaian listrik orde dua,
4. Menyajikan model matematika untuk rangkaian listrik orde dua,
5. Menganalisa penyelesaian homogen dan tak homongen model matematika untuk rangkaian listrik orde dua.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Rangkaian LC seri**

Rangkaian LC seri dengan menggunakan sumber tegangan E volt digambarkan pada rangkaian LC seri dengan hukum tegangan Kirchoff. Model persamaan rangkaian LC seri yaitu:

VL + Vc = E

Dengan :

VL adalah tegangan pada indukator L yaitu

Vc adalah tegangan untuk kapasitor C yaitu :

Diketahui bahwa I = dengan Q pada muatan dalam Coulomb. Sehingga moddel persamaan dapat ditulis

Jika persamaan dideferensialkan maka :

Diperoleh model persamaan yang dapat dinyatakan juga dalam muatan Q(t) yaitu :

Kasus A. Jika sumber tegangan E = 0

Dimisalkan untuk model persamaan differensial orde dua rangkaian adalah :

Atau

persamaan karaktreristik dari persamaan diferensial di atas:

Akar – akar persamaan kerakteristik :

Sehingga penyeselaian umum PD

Dengan C1,C2, A,B = kostanta; r = α ±iβ

maka :

Kasus B. Jika sumber baterai E = konstanta

Menentukan kuat arus I(t)untuk kasus ini berdasarkan model persamaan diferensial Q(t), selanjutnya I(t) didapatkan dari hubungan I(t) =. Model persamaan rangkaian untuk Q(t) dinyatakan sebagai berikut:

Atau

Persamaan diatas adalah persamaan diferensial tak homongen orde dua, penyelesaian disebut penyelesaian lengkap terdiri dari penyelesaian homogen dan penyelesaian tak homongen

Penyelesaian homongen:

Dan penyesaian yang tak homongen:

Penyelesaian lengkap

Kasus C jika sumber bateri E = E0 cos ωt

Model persamaan rangkaian untuk Q (t) dinyatakan sebagai :

Atau

Penyelesaian model persamaan diatas adalah penyelesaian lengkap muatan fungsi waktu, terdiri atas penyelesaian homongen dan penyelesaian tak homonen,

Penyelesaian homongen:

Dan solusi takhomongen adalah ;

Jika didefenisikan

Kasus D. Jika sumber baterai E = E0 cos ωt dengan ω =

Model persamaaan rangkaian untuk Q (t) dinyatakan sebagai berikut:

Atau

Penyelesaian homogen :

Qh(t) = A cos ωt + b sinωt atau Qh(t) = C cos (ωt – θ)

Jadi solusi tak homonen adalah :

Qp (t) = t(k cos ωt + M sin ωt) =

Penyelesaian terlengkap :

Q(t) = Qh(t) + Qp (t) = Qh(t) = C cos (ω0t –θ) +

Tabel 1. Rangkaian LC seri

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **L** | **C** | **E** | **I(t) homogen** | **I(t) tak homogen** |
| 0,2 henry | 0,05 farad | 0 volt |  | 0 |
| 100 volt |  |
| 0,1 farad | 0 volt |  | 0 |
| 100 volt |  |

**Rangkaian RCL seri**

Rangkaian RCL seri dengan sumber baterai E volt. Model persamaan rangkaian didapatkan dengan hukum tegangan kirchoff yaitu :

VR + VL+Vc = E

Dengan VR adalah tegangan pada reistor R yaitu RI dan VL adalah tegangan pada indukator L yaitu . VC adalah tegangan pada kapasitor C yaitu

Diketahui bahwa dengan Q adalah muatan dalam coulomb

Untuk menghilangkan tanda integral, persamaan diddeferensialkan maka :

Model persamaan untuk dapat juga dinyatakan dalam muatan Q(t) yaitu ;

Kasus A jika sumber baterai E =E0

Model persamaan rangkaian dinyatakan sebagai :

Penyelesaian persamaan homogen orde dua di atas adalah persamaan karakteristikdari persamaan diferensial:

Akar persamaan karakteristik

Terdapat tiga kemungkinan akar – akar nilai :

1. Jika >0, maka r1.2 adalah dua akar Real yang berbeda denan r1.2 R mka solusi umum

+C2er2t

1. Jika , maka r1 = r2 = r dengan m1,2  R, maka solisu umu
2. Jika maka r1.2 = dengan maka solusi umumnya:

Dengan rumus Euler yaitu *eit = cos t + i sin t* maka bentuk trigonometri rumus dapat ditentukan :

y = C1e(α +iβ)t + C2te(α +iβ)t

 = C1eαt(cos βt + i sin βt) + C2eαt (-cos βt - i sin βt); - cos β= cos βt

 = (C1+C2) eαt(cosβt) + i(C1 + C2) eαt(sinβt)

 = Aeαtcosβt + Beαt sin βt , A B konstanta bilangan kompleks

Kasus B. Jika sumber bateri yaitu model persamaan rangkaian adalah :

Penyelesaian model persamaan diatas terdiri dari solusi homogen dan solusi tak homogen. Untuk penyelesaian homogen sama seperti pada A.

Penyelesaian tak homogen:

Jadi penyelesaian lengkap tak homogen adalah :

Contoh analisis model matematika rangkaian RCL Seri :

1. Jika R = 16Ω , L = 0,02 H, C = 2 x 10-4 F, dan E = 12 Volt. Dianggap pada saat t = 0, arus I = 0 dan muatan kapasitor Q = 0, akan ditentukan muatan Q dan I sebagai fungsi waktu t dalam rangkaian RLC seri

Penyelesaian:

Persamaan yang mengunakan untk menyelesaian kasus ini :

Dengan substitusi R = 16 ῼ, L = 0,02 H,C =2x10-4 F dan E = 12 volt,maka diperoleh:

Sebagai penyelesaian homongen :

Qh = e-400t(C1 cos 300t + C2 sin 300t)

Menghasilkan Qk = 2,4 x 10-3, penyelesaian lengkap adalah

Q(t) = 2,4 x 10-3 + e-400t (C1 cos 300t +C2 sin 300t)

*I* (t) diperoleh dengan diferensiasi Q(t) didapatkan:

*I* (t) = = -400 e-400 t (C1 cos 300t + C2 sin 300t) + e-400(-300 C1 sin 300 t + 300 C2 cos 300t)

Jadi, penyelesaian lengkap untuk muatan listrik adalah

Q(t) = 10 -3 b

1. Diketahui suatu induktor 2 henry, dengan hambatan 16 ohm dan kapasitor 0,02 farad dihubungkan secara seri dengan suatu baterai dengan ggl = 100 *sin* 3*t* pada *t* = 0 *Q(c)* dan *I* dalam rangkaian adalah nol. Akan ditentukan muatan dan arus pada *t* > 0

Penyelesaian :

Berdasarkan hukum kirchoffuntuk muatan *Q* dan arus sesaat *I* pada waktu *t*, maka diperoleh persamaan:

 karena I = dQ/dt,

 sin 3t

untuk *Q* = 0 maka *Dq/dt* = 0 dan *t* = 0, kita peroleh hasil akhir muatan

dan

arus =

suku pertama adalah arus stabil (steady-state) dan suku ked ua, yang dapat abaikan untuk waktu yang bertambah, dinamakan arus transien.

**KESIMPULAN**

1. Dalam model matematika menggunakan persamaan diferensial orde dua untuk rangkaian listrik LC seri dan rangkaian RLC seri diperoleh solusi homogen dan tak homogen.
2. Untuk rangkaian listrik LC seri keadaan induktor dan kapasitor yang konstan diperoleh solusi homogen yang sama dan solusi tak homogen yang berbeda, dengan kondisi sumber baterai (E) berubah.
3. Pada rangkaian listrik RLC seri diperoleh penyelesaian untuk arus stabil arus transien.
4. Untuk penelitian selanjutnya penulis diharapkan dapat menentukan dan menganalisa model matematika untuk rangkaian listrik LC maupun RLC paralel.

**DAFTAR PUSTAKA**

Bambang S,(1989). *Pengantar Model Matematika.* Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.

Banks, R.B.(1994). *Growth and Diffusion Phenomena*: Mathematical Frameworks and Applications. Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Bronson, Richard dan Gabriel B.Costa.(2007). *Persamaan Diferensial Edisi ketiga.* Erlangga . Jakarta.

Degeng, I..W.(2007). *Kalkulus Lanjut Persamaan Diferensial dan Aplikasinya*Graha Ilmu. Yogyakarta.

Hayt,Kemmerly, Durbin.(2019). *Rangkaian Listrik.*Erlangga: Jakarta.

Kusmaryanto,Sigit. *Penyelesaian Model Rangkaian Listrik*

Lestari, Dwi.(2013). *Diktat Persamaan Diferensial dan Aplikasinya.* Graha Ilmu. Yogyakarta.

Muljono,Prof.Dr.(2019). *Matematika Untuk Teknik.*Penerbit Andi. Bandung.

Purcell edwin j –dale varber, Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 2.Erlangga. Jakarta.

Wahono,Edi.(2008). Panduan Fisika Praktis. Pustaka Widyatama. Yogyakarta.